Ergänzendes Material:

In der Funktionentheorie gibt drei Arten von isolierten Singularitäten: Hebbare Singularitäten, Pole (Polstellen) und wesentliche Singularitäten. Dabei gehören die hebbaren Singularitäten und die Polstellen zu den außerwesentlichen Singularitäten. Für die Klassifizierung der Art einer Singularität gibt es verschiedene Möglichkeiten:

1. Hebbare Singularitäten: $D \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in D$, $f : D\backslash\{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph, d.h. a ist eine isolierte Singularität von f. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a): a ist hebbar

(b): $\exists \dot{U} := \dot{U}(a) \subset D \;\wedge\; \exists C \geqslant 0 \;\forall z \in \dot{U} : \; |f(z)| \leqslant C$ (Riemannscher Hebbarkeitssatz)

(c): $\operatorname{ord}(f,a) \geqslant 0$

(d): a ist eine außerwesentliche Singularität und kein Pol

(e): f lässt sich analytisch in a fortsetzen

(f): $0 \leqslant r_1 < r_2 \leqslant \infty$ mit $R_{r_1,r_2}(a) := \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z-a| < r_2\} \subset D$,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n \;\forall z \in R_{r_1,r_2}(a)$$ Laurentreihe. Dann gilt: $a_n = 0 \;\forall n \in \mathbb{Z}$ mit $n < 0$

d.h. der Hauptteil der Laurentreihe verschwindet identisch.

(g): $\exists w \in \mathbb{C} : \lim\limits_{z \to a, z \in D\backslash\{a\}} f(z) = w$

2. Polstellen (Pole): $D \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in D$, $f : D\backslash\{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph, d.h. a ist eine isolierte Singularität von f. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a): a ist ein Pol

(b): $\exists k \in \mathbb{N} : \; (z-a)^k f(z)$ besitzt eine hebbare Singularität in a

(c): $\operatorname{ord}(f,a) < 0$

(d): a ist eine außerwesentliche Singularität und nicht hebbar

(e): $0 \leqslant r_1 < r_2 \leqslant \infty$ mit $R_{r_1,r_2}(a) := \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z-a| < r_2\} \subset D$,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n \;\forall z \in R_{r_1,r_2}(a)$$ Laurentreihe. Dann gilt: (1): $\exists k \in \mathbb{N}$: $a_{-k} \neq 0$ und (2): $\forall n < -k$: $a_n = 0$, d.h. der Hauptteil der Laurentreihe bricht nach k Gliedern ab. In diesem Fall bezeichnet k die Ordnung der Polstelle.

(f): $\lim\limits_{z \to a, z \in D\backslash\{a\}} |f(z)| = \infty$ (d.h. $\forall C > 0 \;\exists \delta > 0 \;\forall z \in D$ mit $0 < |z-a| < \delta$: $|f(z)| \geqslant C$)

3. Wesentliche Singularitäten: $D \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in D$, $f : D\backslash\{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph, d.h. a ist eine isolierte Singularität von f. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a): a ist eine wesentliche Singularität

(b): $\forall b \in \mathbb{C} \;\wedge\; \forall \varepsilon > 0 \;\exists z \in D \cap \dot{U}(a) : \; |f(z) - b| < \varepsilon$ (d.h. In jeder noch so kleinen punktierten Umgebung von a kommt f jedem beliebigen Wert $b \in \mathbb{C}$ beliebig nahe.

(c): a ist nicht außerwesentlich (d.h. a ist weder eine Polstelle noch eine hebbare Singularität)

(d): $0 \leqslant r_1 < r_2 \leqslant \infty$ mit $R_{r_1,r_2}(a) := \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z-a| < r_2\} \subset D$,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n \;\forall z \in R_{r_1,r_2}(a)$$ Laurentreihe. Dann gilt: $a_n \neq 0$ für unendlich viele $n \in \mathbb{Z}$ mit $n < 0$

(e): $\lim\limits_{z \to a, z \in D\backslash\{a\}} f(z)$ existiert nicht

Aufgabe 44

Berechnen Sie die Laurent-Entwicklung von

$$\frac{z^2-1}{z^2+1} \quad \text{für} \quad |z-1| > 2$$

Lösung:

Die Funktion

$$f(z) = \frac{z^2-1}{z^2+1} = \frac{z^2-1}{(z+i)(z-i)}$$

besitzt in den Punkten $\pm i$ zwei Singularitäten. Die Laurent-Entwicklung soll in

$$R_{2,\infty}(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid 2 < |z-1| < \infty\}$$

durchgeführt werden.

1. Schritt: (Partialbruchzerlegung, PBZ)

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z+i)(z-i)} \stackrel{!}{=} \frac{A}{(z+i)} + \frac{B}{(z-i)} = \frac{(A+B)z + (B-A)i}{(z+i)(z-i)}$$

Wir erhalten die zwei Bedingungen

(1): $A + B = 0$

(2): $i(B - A) = 1$

Da diese zwei Gleichungen die Lösungen $A = \frac{i}{2}$ und $B = -\frac{i}{2}$ besitzen, folgt die PBZ

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{\frac{i}{2}}{(z+i)} + \frac{-\frac{i}{2}}{(z-i)} \quad \forall\, z \in \mathbb{C}\backslash\{i,-i\}$$

2. Schritt: (Laurentreihenentwicklung in $R_{2,\infty}(1)$)

1. Wir führen zunächst die Laurent-Entwicklung von $\frac{1}{z^2+1}$ in $R_{2,\infty}(1)$ durch. Man beachte dabei, dass wir (da $R_{2,\infty}(1)$ den Mittelpunkt 1 besitzt) den Nenner mit ± 1 ergänzen, ehe wir die geometrische Reihe anwenden:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z+i)} &= \frac{1}{(z-1)+(1+i)} = \frac{1}{(z-1)} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{(1+i)}{(z-1)}\right)} = \frac{1}{(z-1)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{(1+i)}{(z-1)}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1+i)^n (z-1)^{-n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (1+i)^{n-1} (z-1)^{-n} \\ &= \sum_{n=-1}^{-\infty} (-1)^{-n-1} (1+i)^{-n-1} (z-1)^n\end{aligned}$$

Dabei liegt die Begründung der Anwendung der geometrischen Reihe in $R_{2,\infty}(1)$ verborgen, denn es gilt:

$$\left|-\frac{(1+i)}{(z-1)}\right| < 1 \iff \sqrt{2} = |1+i| < |z-1|$$

Auf die selbe Weise erhalten wir:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-i)} &= \frac{1}{(z-1)+(1-i)} = \frac{1}{(z-1)} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{(1-i)}{(z-1)}\right)} = \frac{1}{(z-1)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{(1-i)}{(z-1)}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1-i)^n (z-1)^{-n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (1-i)^{n-1} (z-1)^{-n} \\ &= \sum_{n=-1}^{-\infty} (-1)^{-n-1} (1-i)^{-n-1} (z-1)^n\end{aligned}$$

Auch in diesem Fall liegt die Begründung der Anwendung der geometrischen Reihe in $R_{2,\infty}(1)$ verborgen, denn es gilt:

$$\left|-\frac{(1-i)}{(z-1)}\right| < 1 \iff \sqrt{2} = |1-i| < |z-1|$$

Damit erhalten wir zunächst einmal

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2+1} &= \frac{\frac{i}{2}}{(z+i)} + \frac{-\frac{i}{2}}{(z-i)} = \sum_{n=-1}^{-\infty} (-1)^{-n-1}\frac{i}{2}\left((1+i)^{-n-1} - (1-i)^{-n-1}\right)(z-1)^n \\ &= \sum_{n=-1}^{-\infty} (-2)^{-n-1}\frac{i}{2}\left((1+i)^{-n-1} - (1-i)^{-n-1}\right)(z-1)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-1)^n\end{aligned}$$

wobei

$$a_n := \begin{cases} (-1)^{-n-1}\frac{i}{2}\left((1+i)^{-n-1} - (1-i)^{-n-1}\right) & \text{, falls } n \in \mathbb{Z} \text{ mit } n \leqslant -2 \\ 0 & \text{, falls } n \in \mathbb{Z} \text{ mit } n > -2 \end{cases}$$

2. Für den Zähler schreiben wir wegen des Entwicklungspunktes 1:

$$z^2 - 1 = (z-1)^2 + \lambda(z-1) + \mu, \text{ wobei } \lambda, \mu \in \mathbb{C} \text{ noch geeignet zu wählen sind}$$

Multiplizieren wir die rechte Seite aus, so erhalten wir $\lambda = 2$ und $\mu = 0$.
3. Die vollständige Laurentreihen-Entwicklung erhalten wir jetzt aus unseren bisherigen Resultaten und einer Indexverschiebung der Laurentreihe:

$$\begin{aligned}\frac{z^2-1}{z^2+1} &= \left[(z-1)^2 + 2(z-1)\right] \cdot \left[\sum_{n=-2}^{-\infty} a_n(z-1)^n\right] \\ &= \sum_{n=-2}^{-\infty} a_n(z-1)^{n+2} + \sum_{n=-2}^{-\infty} 2a_n(z-1)^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{-\infty} a_{n-2}(z-1)^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} 2a_{n-1}(z-1)^n \\ &= a_{-2} + \sum_{n=-1}^{-\infty}\left(a_{n-2} + 2a_{n-1}\right)(z-1)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-1)^n \quad \forall\, z \in R_{2,\infty}(1)\end{aligned}$$

wobei

$$b_n := \begin{cases} a_{n-2} + 2a_{n-1} & \text{, falls } n \in \mathbb{Z} \text{ mit } n < 0 \\ a_{-2} & \text{, falls } n \in \mathbb{Z} \text{ mit } n = 0 \\ 0 & \text{, falls } n \in \mathbb{Z} \text{ mit } n > 0 \end{cases}$$

Aufgabe 45

Bestimmen Sie die Residuen der folgenden Funktionen in $z = 0$:

(1): $\dfrac{z^2+1}{z}$

(2): $\dfrac{z^3}{(z-1)(z^4+2)}$

(3): $\dfrac{e^z}{z^3}$

(4): $\dfrac{\sin z}{z^4}$

Lösung:

zu (1):

1. Möglichkeit: (Rechenregeln).

Rechenregel: $U \subset \mathbb{C}$ offen, $c \in U$ und $f : U \to \mathbb{C}$ meromorph. Dann gilt:

$$f \text{ besitzt in } c \text{ einen Pol 1. Ordnung} \implies \operatorname{Res}_c(f) = \lim_{z\to c}(z-c)\cdot f(z)$$

Betrachte $U := \mathbb{C}$, $c := 0 \in U$ und $f : U \to \mathbb{C}$ mit $f(z) := \frac{z^2+1}{z}$ ist meromorph auf U (denn: $f : U \backslash \{c\} \to \mathbb{C}$ ist holomorph in $U \backslash \{c\}$, $\{c\}$ ist diskret in U und f besitzt in c einen Pol). Da f in $c = 0$ einen Pol 1. Ordnung besitzt, gilt nach der Rechenregel:

$$\mathrm{Res}_0\left(\frac{z^2+1}{z}\right) = \lim_{z\to 0} z \cdot \frac{z^2+1}{z} = \lim_{z\to 0} z^2+1 = 1$$

Bemerkung: Es ist auch möglich, zunächst die $\mathbb{C}$-Linearität der Residuumfunktion auszunutzen

$$\mathrm{Res}_0\left(\frac{z^2+1}{z}\right) = \mathrm{Res}_0\left(z+\frac{1}{z}\right) = \mathrm{Res}_0\left(z\right) + \mathrm{Res}_0\left(\frac{1}{z}\right)$$

Da die Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $g(z) := z$ insbesondere im 0 holomorph ist, folgt $\mathrm{Res}_0(z) = 0$. Die Funktion $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $h(z) := \frac{1}{z}$ ist meromorph und besitzt in 0 einen Pol 1. Ordnung. Nun können wir (analog wie oben) mit Hilfe der Rechenregel $\mathrm{Res}_0\left(\frac{1}{z}\right) = 1$ folgern und erhalten dasselbe Resultat wie bereits zuvor.

2. Möglichkeit: (Laurententwicklung, Laurentreihe).
Aus $\frac{z^2+1}{z} = z + \frac{1}{z}$ erhalten wir direkt die Laurentreihe von f auf $R_{0,\infty}(0) := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < \infty\}$ mit Zentrum 0, indem wir $a_n := 1\ \forall n \in \mathbb{Z}$ mit $n \in \{-1, 1\}$ und $a_n := 0\ \forall n \in \mathbb{Z}$ mit $n \notin \{-1, 1\}$ setzen. Es gilt daher

$$\frac{z^2+1}{z} = z + \frac{1}{z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

Das Residuum erhalten wir jetzt direkt aus a_{-1}

$$\mathrm{Res}_0\left(\frac{z^2+1}{z}\right) = a_{-1} = 1$$

3. Möglichkeit: (Cauchysche Integralformel für (Kreisscheiben)).
Betrachte $U := \mathbb{C}$, $f : U \to \mathbb{C}$ mit $f(z) := z^2 + 1$ holomorph auf $\mathbb{C}$, $c := 0 \in U$, $B := B_\rho(0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \rho\}$ offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt $c = 0$ und Radius $\rho > 0$ beliebig klein, $\overline{B} \subset U$, $\zeta := 0 \in B$. Dann folgt aus der Cauchyschen Integralformel (für Kreisscheiben) (CIF):

$$\mathrm{Res}_0\left(\frac{z^2+1}{z}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho} \frac{z^2+1}{z} dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_\rho(0)} \frac{z^2+1}{z} dz \overset{\text{(CIF)}}{=} \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i \cdot \underbrace{(0^2+1)}_{=f(0)} = 1$$

<u>zu (2):</u>
1. Möglichkeit: (Rechenregeln).
Rechenregel: $U \subset \mathbb{C}$ offen, $c \in U$ und $f : U \to \mathbb{C}$ meromorph. Dann gilt:

$$f \text{ besitzt in } c \text{ eine hebbare Singularität} \implies \mathrm{Res}_c(f) = 0$$

Betrachte $U := \mathbb{C}$, $c := 0$ und $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) := \frac{z^3}{(z-1)(z^4+2)}$ ist meromorph auf U (denn mit der Polstellenmenge $V := \{1, 2^{-\frac{1}{4}} + i2^{-\frac{1}{4}}, -2^{-\frac{1}{4}} + i2^{-\frac{1}{4}}, -2^{-\frac{1}{4}} - i2^{-\frac{1}{4}}, 2^{-\frac{1}{4}} - i2^{-\frac{1}{4}}\}$ von f gilt: $f : U \backslash V \to \mathbb{C}$ ist holomorph in $U \backslash V$, V ist diskret in U und f besitzt in jedem Punkt von V einen Pol). Da f im Punkt $c = 0 \in U \backslash V$ holomorph ist und dort somit keinen Pol besitzt, gilt nach der Rechenregel:

$$\mathrm{Res}_0\left(\frac{z^3}{(z-1)(z^4+2)}\right) = 0$$

2. Möglichkeit: (Laurententwicklung, Laurentreihe).
<u>1. Schritt:</u> (Partialbruchzerlegung, PBZ)

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-1)(z^4+2)} = \frac{A}{(z-1)} &\cdot \frac{B}{\left(z-\left(2^{-\frac{1}{4}}+i2^{-\frac{1}{4}}\right)\right)} \cdot \frac{C}{\left(z-\left(-2^{-\frac{1}{4}}+i2^{-\frac{1}{4}}\right)\right)} \\ &\cdot \frac{D}{\left(z-\left(2^{-\frac{1}{4}}-i2^{-\frac{1}{4}}\right)\right)} \cdot \frac{E}{\left(z-\left(-2^{-\frac{1}{4}}-i2^{-\frac{1}{4}}\right)\right)}\end{aligned}$$

Die Lösung dieser Partialbruchzerlegung

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{3}\\
B &= \frac{2^{\frac{3}{4}}}{48} \cdot \left(\left[1-\sqrt{2}-2^{\frac{5}{4}}\right] + i\left[1+\sqrt{2}+2^{\frac{3}{4}}\right]\right)\\
C &= \frac{2^{\frac{3}{4}}}{48} \cdot \left(\left[-1+\sqrt{2}-2^{\frac{5}{4}}\right] + i\left[1+\sqrt{2}-2^{\frac{3}{4}}\right]\right)\\
D &= -\frac{2^{\frac{3}{4}}}{48} \cdot \left(\left[-1+\sqrt{2}+2^{\frac{5}{4}}\right] + i\left[1+\sqrt{2}+2^{\frac{3}{4}}\right]\right)\\
E &= -\frac{2^{\frac{3}{4}}}{48} \cdot \left(\left[1-\sqrt{2}+2^{\frac{5}{4}}\right] + i\left[1+\sqrt{2}-2^{\frac{3}{4}}\right]\right)
\end{aligned}
$$

Der Übersichtlichkeithalber verwenden wir im folgenden Verlauf weiterhin die Bezeichnungen A, B, C, D, E.

<u>2. Schritt:</u> (Laurentreihenentwicklung in $R_{\sqrt[4]{2},\infty}(0)$)

Für den Term $\frac{A}{(z-1)}$ erhalten wir aus der geometrischen Reihe

$$\frac{A}{(z-1)} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{1}{z}\right)} = Az^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = Az^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} Az^{-n-1} = \sum_{n=-1}^{-\infty} Az^n$$

Dabei liegt die Begründung der Anwendung der geometrischen Reihe in $R_{\sqrt[4]{2},\infty}(0)$ verborgen, denn es gilt:

$$\left|\frac{1}{z}\right| < 1 \iff 1 < |z|$$

Die restlichen vier Terme lassen sich gleichermaßen berechnen. Exemplarisch führen wir dies für den Term $\frac{B}{\left(z-\left(2^{-\frac{1}{4}}+i2^{-\frac{1}{4}}\right)\right)}$ durch.

$$
\begin{aligned}
\frac{B}{\left(z-\left(2^{-\frac{1}{4}}+i2^{-\frac{1}{4}}\right)\right)} &= \frac{B}{z} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{2^{-\frac{1}{4}}+i2^{-\frac{1}{4}}}{z}\right)} = Bz^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^{-\frac{1}{4}}+i2^{-\frac{1}{4}}}{z}\right)^n\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} B\left(2^{-\frac{1}{4}}+i2^{-\frac{1}{4}}\right)^n z^{-n-1} = \sum_{n=-1}^{-\infty} B\left(2^{-\frac{1}{4}}+i2^{-\frac{1}{4}}\right)^{-n-1} z^n
\end{aligned}
$$

Dabei liegt die Begründung der Anwendung der geometrischen Reihe in $R_{\sqrt[4]{2},\infty}(0)$ verborgen, denn es gilt:

$$\left|\frac{2^{-\frac{1}{4}}+i2^{-\frac{1}{4}}}{z}\right| < 1 \iff \sqrt[4]{2} = \sqrt{2^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{2^{-\frac{1}{2}}+2^{-\frac{1}{2}}} = \left|2^{-\frac{1}{4}}+i2^{-\frac{1}{4}}\right| < |z|$$

Insgesamt erhalten wir die folgende Laurentreihe um 0

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(z-1)(z^4+2)} = \sum_{n=-1}^{\infty}\Bigg[&A + B\left(2^{-\frac{1}{4}}+i2^{-\frac{1}{4}}\right)^{-n-1} + C\left(-2^{-\frac{1}{4}}+i2^{-\frac{1}{4}}\right)^{-n-1}\\
&+D\left(2^{-\frac{1}{4}}-i2^{-\frac{1}{4}}\right)^{-n-1} + E\left(-2^{-\frac{1}{4}}-i2^{-\frac{1}{4}}\right)^{-n-1}\Bigg] z^n \quad \forall\, z \in R_{\sqrt[4]{2},\infty}(0)
\end{aligned}
$$

Multiplizieren wir diese mit dem noch fehlenden Term z^3, so erhalten wir (nach einer Indexverschiebung) die gesuchte Laurentreihe um 0

$$
\begin{aligned}
\frac{z^3}{(z-1)(z^4+2)} = \sum_{n=2}^{-\infty}\Bigg[&A + B\left(2^{-\frac{1}{4}}+i2^{-\frac{1}{4}}\right)^{-n+2} + C\left(-2^{-\frac{1}{4}}+i2^{-\frac{1}{4}}\right)^{-n+2}\\
&+D\left(2^{-\frac{1}{4}}-i2^{-\frac{1}{4}}\right)^{-n+2} + E\left(-2^{-\frac{1}{4}}-i2^{-\frac{1}{4}}\right)^{-n+2}\Bigg] z^n \quad \forall\, z \in R_{\sqrt[4]{2},\infty}(0)
\end{aligned}
$$

Das Residuum erhalten wir jetzt direkt aus a_{-1}

$$\operatorname{Res}_0\left(\frac{1}{(z-1)(z^4+2)}\right) = a_{-1} = A + B\left(2^{-\frac{1}{4}} + i2^{-\frac{1}{4}}\right)^3 + C\left(-2^{-\frac{1}{4}} + i2^{-\frac{1}{4}}\right)^3 + D\left(2^{-\frac{1}{4}} - i2^{-\frac{1}{4}}\right)^3 + E\left(-2^{-\frac{1}{4}} - i2^{-\frac{1}{4}}\right)^3 = 0$$

3. Möglichkeit: (Cauchysche Integralsatz für (Kreisscheiben)).
Betrachte $U := B_\rho(0)$ offen mit $\rho < 1$ beliebig klein (insbesondere $\rho < 1$) und $f : U \to \mathbb{C}$ mit $f(z) := \frac{z^3}{(z-1)(z^4+2)}$ holomorph auf U. Da $\partial B_\rho(0)$ (also $|z| = \rho$) ein geschlossener Integrationsweg ist, gilt nach dem Cauchyschen Integralsatz (für Kreisscheiben) (CIS):

$$\operatorname{Res}_0\left(\frac{z^3}{(z-1)(z^4+2)}\right) \overset{\text{(CIS)}}{=} 0$$

zu (3):
1. Möglichkeit: (Rechenregeln).
Rechenregel: $U \subset \mathbb{C}$ offen, $c \in U$, $m \in \mathbb{N}$ und $f : U \to \mathbb{C}$ meromorph. Dann gilt:

$$f \text{ besitzt in } c \text{ einen Pol } m\text{-ter Ordnung} \implies \operatorname{Res}_c(f) = \lim_{z\to c} \frac{1}{(m-1)!} \cdot \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z-c)^m \cdot f(z)\right)$$

Betrachte $U := \mathbb{C}$, $c := 0 \in U$ und $f : U \to \mathbb{C}$ mit $f(z) := \frac{e^z}{z^3}$ ist meromorph auf U (denn: $f : U\backslash\{c\} \to \mathbb{C}$ ist holomorph in $U\backslash\{c\}$, $\{c\}$ ist diskret in U und f besitzt in c einen Pol). Da f in $c = 0$ einen Pol 3. Ordnung besitzt (denn für die Umgebung $B_1(0) \subset U$ von $c = 0$ gilt $\lim_{z\to 0}\left|\frac{e^z}{z^3} \cdot (z-0)^k\right| = \infty$ für $k \in \{0,1,2\}$ und $z \mapsto \frac{e^z}{z^3} \cdot (z-0)^3$ ist auf $B_1(0)\backslash\{0\}$ beschränkt), gilt nach der Rechenregel:

$$\operatorname{Res}_0\left(\frac{e^z}{z^3}\right) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{(3-1)!} \cdot \frac{d^{3-1}}{dz^{3-1}}\left((z-0)^3 \cdot \frac{e^z}{z^3}\right) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2}{dz^2} e^z = \frac{1}{2} \lim_{z\to 0} e^z = \frac{1}{2}$$

2. Möglichkeit: (Laurententwicklung, Laurentreihe).
Aus der Darstellung der Exponentialreihe erhalten wir direkt die Laurentreihe

$$\frac{e^z}{z^3} = z^{-3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{n-3} = \sum_{n=-3}^{\infty} \frac{1}{(n+3)!} z^n$$

Das Residuum erhalten wir jetzt direkt aus a_{-1}

$$\operatorname{Res}_0\left(\frac{e^z}{z^3}\right) = a_{-1} = \frac{1}{2}$$

3. Möglichkeit: (Verallgemeinerte Cauchysche Integralformel für (Kreisscheiben)).
Betrachte $U := \mathbb{C}$, $f : U \to \mathbb{C}$ mit $f(z) := e^z$ holomorph auf $\mathbb{C}$, $c := 0 \in U$, $B := B_\rho(0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \rho\}$ offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt $c = 0$ und Radius $\rho > 0$ beliebig klein, $\overline{B} \subset U$, $\zeta := 0 \in B$ und $n := 2 \in \mathbb{N}$. Dann folgt aus der verallgemeinerten Cauchyschen Integralformel (für Kreisscheiben) (CIF):

$$\operatorname{Res}_0\left(\frac{e^z}{z^3}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \frac{e^z}{z^3} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(0)} \frac{e^z}{z^3} dz \overset{\text{(CIF)}}{=} \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{2\pi i}{2!} \cdot \underbrace{e^0}_{=f^{(2)}(0)} = \frac{1}{2}$$

zu (4):
1. Möglichkeit: (Rechenregeln).
Rechenregel: $U \subset \mathbb{C}$ offen, $c \in U$, $m \in \mathbb{N}$ und $f : U \to \mathbb{C}$ meromorph. Dann gilt:

$$f \text{ besitzt in } c \text{ einen Pol } m\text{-ter Ordnung} \implies \operatorname{Res}_c(f) = \lim_{z\to c} \frac{1}{(m-1)!} \cdot \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z-c)^m \cdot f(z)\right)$$

Betrachte $U := \mathbb{C}$, $c := 0 \in U$ und $f : U \to \mathbb{C}$ mit $f(z) := \frac{\sin z}{z^4}$ ist meromorph auf U (denn: $f : U\backslash\{c\} \to \mathbb{C}$ ist holomorph in $U\backslash\{c\}$, $\{c\}$ ist diskret in U und f besitzt in c einen Pol). Da f in $c = 0$ einen Pol 3.

Ordnung besitzt (denn für die Umgebung $B_1(0) \subset U$ von $c = 0$ gilt $\lim_{z\to 0}\left|\frac{\sin z}{z^4}\cdot(z-0)^k\right| = \infty$ für $k \in \{0,1,2,3\}$ und $z \mapsto \frac{\sin z}{z^4}\cdot(z-0)^3$ ist auf $B_1(0)\backslash\{0\}$ beschränkt), gilt nach der Rechenregel und der Regel von L'Hospital (LH):

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_0\left(\frac{\sin z}{z^4}\right) &= \lim_{z\to 0}\frac{1}{(3-1)!}\cdot\frac{d^{3-1}}{dz^{3-1}}\left((z-0)^3\cdot\frac{\sin z}{z^4}\right) = \lim_{z\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{\sin z}{z}\right)\\
&= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{-2z^2\sin z - 2z\cos z + 2\sin z}{z^3}\\
&\overset{\text{(HR)}}{=} \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{\frac{d^3}{dz^3}\left(-z^2\sin z - 2z\cos z + 2\sin z\right)}{\frac{d^3}{dz^3}z^3}\\
&= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{-2\cos z + 4z\sin z + z^2\cos z}{6}\\
&= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-2}{6}\right) = -\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

2. Möglichkeit: (Laurententwicklung, Laurentreihe).
Aus der Darstellung der Sinusreihe erhalten wir direkt die Laurentreihe

$$\frac{\sin z}{z^4} = z^{-4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n-3}$$

Das Residuum erhalten wir jetzt direkt aus a_{-1}, wobei a_{-1} den Koeffizient von z^{-1} bezeichnet (d.h. für $n = 1$):

$$\operatorname{Res}_0\left(\frac{\sin z}{z^4}\right) = a_{-1} = \frac{(-1)^1}{(2\cdot 1+1)!} = -\frac{1}{6}$$

Bemerkung: Da $a_{-3} \neq 0$ (a_{-3} bezeichnet den Koefizienten von z^{-3}) und alle $a_{-n} = 0$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 3$ (a_{-n} bezeichnet den Koeffiziente von z^{-n}), besitzt die Funktion $\frac{\sin z}{z^4}$ in 0 einen Pol 3. Ordnung.
3. Möglichkeit: (Verallgemeinerte Cauchysche Integralformel für (Kreisscheiben)).
Betrachte $U := \mathbb{C}$, $f : U \to \mathbb{C}$ mit $f(z) := \sin z$ holomorph auf $\mathbb{C}$, $c := 0 \in U$, $B := B_\rho(0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \rho\}$ offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt $c = 0$ und Radius $\rho > 0$ beliebig klein, $\overline{B} \subset U$, $\zeta := 0 \in B$ und $n := 3 \in \mathbb{N}$. Dann folgt aus der verallgemeinerten Cauchyschen Integralformel (für Kreisscheiben) (CIF):

$$\operatorname{Res}_0\left(\frac{\sin z}{z^4}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho}\frac{\sin z}{z^4}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_\rho(0)}\frac{\sin z}{z^4}dz \overset{\text{(CIF)}}{=} \frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{2\pi i}{3!}\cdot(\underbrace{-\cos(0)}_{=f^{(3)}(0)}) = -\frac{1}{6}$$

Aufgabe 46

Bestimmen Sie die Residuen der folgenden Funktionen in $z = 1$:

(1): $\dfrac{1}{(z^2-1)(z+2)}$

(2): $\dfrac{1}{z^n-1}$

Lösung:

zu (1):

1. Möglichkeit: (Rechenregeln).
Rechenregel: $U \subset \mathbb{C}$ offen, $c \in U$ und $f : U \to \mathbb{C}$ meromorph. Dann gilt:

$$f \text{ besitzt in } c \text{ einen Pol 1. Ordnung} \implies \operatorname{Res}_c(f) = \lim_{z\to c}(z-c)\cdot f(z)$$

Betrachte $U := \mathbb{C}$, $c := 1 \in U$ und $f : U \to \mathbb{C}$ mit $f(z) := \frac{1}{(z^2-1)(z+2)}$ ist meromorph auf U (denn: $f : U\backslash\{-2,-1,1\} \to \mathbb{C}$ ist holomorph in $U\backslash\{-2,-1,1\}$, $\{-2,-1,1\}$ ist diskret in U und f besitzt in jedem Punkt der Menge $\{-2,-1,1\}$ einen Pol). Da f in $c=1$ einen Pol 1. Ordnung besitzt, gilt nach der Rechenregel:

$$\mathrm{Res}_1\left(\frac{1}{(z^2-1)(z+2)}\right)=\lim_{z\to 1}(z-1)\cdot\frac{1}{(z-1)(z+1)(z+2)}=\lim_{z\to 1}\frac{1}{(z+1)(z+2)}=\frac{1}{6}$$

2. Möglichkeit: (Laurententwicklung, Laurentreihe).
Die Funktion

$$f(z)=\frac{1}{(z^2-1)(z+2)}=\frac{1}{(z-1)(z+1)(z+2)}$$

besitzt in den Punkten $-2,-1,1$ drei Singularitäten (Polstellen der 1. Ordung). Die Laurent-Entwicklung wird in

$$R_{0,2}(1)=\{z\in\mathbb{C}\mid 0<|z-1|<2\}$$

durchgeführt.
1. Schritt: (Partialbruchzerlegung, PBZ)
Bemerke: Da wir eine Laurententwicklung um 1 vornehmen und die Laurentreihe Terme der Art $(z-1)^n$ aufweist, werden wir den $\frac{1}{(z-1)}$ bei der Partialbruchzerlegung nicht weiter berücksichtigen.

$$\frac{1}{(z+1)(z+2)}\stackrel{!}{=}\frac{A}{(z+1)}+\frac{B}{(z+2)}=\frac{(A+B)z+(2A+B)}{(z+1)(z+2)}$$

Wir erhalten die zwei Bedingungen

$$(1)\colon A+B=0$$
$$(2)\colon 2A+B=1$$

Da diese zwei Gleichungen die Lösungen $A=1$ und $B=-1$ besitzen, folgt die PBZ

$$\frac{1}{(z+1)(z+2)}=\frac{1}{(z+1)}-\frac{1}{(z+2)}\quad\forall\, z\in\mathbb{C}\backslash\{-2,-1\}$$

2. Schritt: (Laurentreihenentwicklung in $R_{0,2}(1)$)
1. Wir führen zunächst die Laurent-Entwicklung von $\frac{1}{(z+1)(z+2)}$ in $R_{0,2}(1)$ durch. Man beachte dabei, dass wir (da $R_{0,2}(1)$ den Mittelpunkt 1 besitzt) den Nenner geeignet ergänzen, ehe wir die geometrische Reihe anwenden:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z+1)}&=\frac{1}{2+(z-1)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{(z-1)}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{(z-1)}{2}\right)}\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{(z-1)}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-1)^n\end{aligned}$$

Dabei liegt die Begründung der Anwendung der geometrischen Reihe in $R_{0,2}(1)$ verborgen, denn es gilt:

$$\left|-\frac{(z-1)}{2}\right|<1\iff|z-1|<2$$

Auf die selbe Weise erhalten wir:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z+2)}&=\frac{1}{3+(z-1)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{(z-1)}{3}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{(z-1)}{3}\right)}\\&=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{(z-1)}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-1)^n\end{aligned}$$

Auch in diesem Fall liegt die Begründung der Anwendung der geometrischen Reihe in $R_{0,2}(1)$ verborgen, denn es gilt:

$$\left|-\frac{(z-1)}{3}\right| < 1 \iff |z-1| < 3$$

Damit erhalten wir zunächst einmal

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z+1)(z+2)} &= \frac{1}{(z+1)} - \frac{1}{(z+2)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-1)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-1)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right)(z-1)^n\end{aligned}$$

2. Die vollständige Laurentreihen-Entwicklung erhalten wir jetzt aus unseren bisherigen Resultaten, der Multiplikation mit dem zunächst vernachlässigtem Term $\frac{1}{(z-1)}$ und einer Indexverschiebung durch

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z^2-1)(z+2)} &= \frac{1}{(z-1)} \cdot \frac{1}{(z+1)(z+2)} = (z-1)^{-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right)(z-1)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right)(z-1)^{n-1} \\ &= \sum_{n=-1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2^{n+2}} - \frac{1}{3^{n+2}}\right)(z-1)^n \qquad \forall\, z \in R_{0,2}(1)\end{aligned}$$

Das Residuum erhalten wir jetzt direkt aus a_{-1}, wobei a_{-1} den Koeffizient von $(z-1)^{-1}$ bezeichnet (d.h. für $n=1$):

$$\operatorname{Res}_1\left(\frac{1}{(z^2-1)(z+2)}\right) = a_{-1} = (-1)^0\left(\frac{1}{2^1} - \frac{1}{3^1}\right) = \frac{1}{6}$$

3. Möglichkeit: (Cauchysche Integralformel für (Kreisscheiben)).
Betrachte $U := \mathbb{C}$, $f: U \to \mathbb{C}$ mit $f(z) := \frac{1}{(z+1)(z+2)}$ holomorph auf $\mathbb{C}\backslash\{-2,-1\}$, $c := 1 \in U$, $B := B_\rho(1) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| < \rho\}$ offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt $c = 1$ und Radius $\rho > 0$ beliebig klein (insbesondere $\rho < 2$), $\overline{B} \subset U$, $\zeta := 1 \in B$. Dann folgt aus der Cauchyschen Integralformel (für Kreisscheiben) (CIF):

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_1\left(\frac{1}{(z^2-1)(z+2)}\right) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-1|=\rho}\frac{1}{(z-1)(z+1)(z+2)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-1|=\rho}\frac{\frac{1}{(z+1)(z+2)}}{(z-1)}dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_\rho(1)}\frac{\frac{1}{(z+1)(z+2)}}{(z-1)}dz \overset{\text{(CIF)}}{=} \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i \cdot \underbrace{\frac{1}{(1+1)(1+2)}}_{=f(1)} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

zu (2):
1. Möglichkeit: (Rechenregeln).
Rechenregel: $U \subset \mathbb{C}$ offen, $c \in U$ und $f: U \to \mathbb{C}$ meromorph. Dann gilt:

$$f \text{ besitzt in } c \text{ einen Pol 1. Ordnung} \implies \operatorname{Res}_c(f) = \lim_{z\to c}(z-c)\cdot f(z)$$

Betrachte $U := \mathbb{C}$, $c := 1 \in U$ und $f: U \to \mathbb{C}$ mit $f(z) := \frac{1}{z^n-1}$ $(n \in \mathbb{N})$ ist meromorph auf U (denn: $f: U\backslash\{e^{j\frac{2\pi i}{n}} \mid j = 0,\dots,n-1\} \to \mathbb{C}$ ist holomorph in $U\backslash\{e^{j\frac{2\pi i}{n}} \mid j = 0,\dots,n-1\}$, $\{e^{j\frac{2\pi i}{n}} \mid j = 0,\dots,n-1\}$ ist diskret in U und f besitzt in 1 (also für $j=0$) einen Pol). Da f in $c=1$ einen Pol 1. Ordnung besitzt, gilt nach der Rechenregel:

$$\operatorname{Res}_1\left(\frac{1}{z^n-1}\right) = \lim_{z\to 1}(z-1)\cdot\frac{1}{(z-1)\cdot\sum_{k=0}^{n-1}z^k} = \lim_{z\to 1}\frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1}z^k} = \frac{1}{n}$$

2. Möglichkeit: (Laurententwicklung, Laurentreihe).
Wähle $n \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest. Die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z^n - 1} = \frac{1}{\prod_{j=0}^{n-1}(z - z_j)}$$

besitzt in den Punkten $z_j := e^{j\frac{2\pi i}{n}}$ jeweils Singularitäten (Polstellen der 1. Ordung). Definiere $R := R(n) := \min\{|1 - z_j| \mid j = 1, \dots, n-1\}$ und wähle $0 < \rho < R$ beliebig, aber fest. Die Laurent-Entwicklung wird in

$$R_{0,\rho}(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - 1| < \rho\}$$

durchgeführt.
<u>1. Schritt:</u> (Partialbruchzerlegung, PBZ)
Für die Laurententwicklung betrachten wir die erneut die n-ten Einheitswurzeln $z_j := e^{j\frac{2\pi i}{n}}$ mit $j \in \mathbb{N}_0$ und $j = 0, \dots, n-1$. Mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung erhalten wir Koeffizienten $A_j \in \mathbb{C}$ für $j = 0, \dots, n-1$ mit

$$f(z) = \frac{1}{z^n - 1} = \frac{1}{\prod_{j=0}^{n-1}(z - z_j)} = \frac{1}{(z - z_0)} \cdot \frac{1}{\prod_{j=1}^{n-1}(z - z_j)} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{A_j}{(z - z_j)}$$

Die Berechnung der A_j's für ein allgemein vorgegebenes $n \in \mathbb{N}$ sei Aufgabe des aufmerksamen Lesers. Es sei lediglich darauf hingewiesen, dass $A_0 = \frac{1}{n}$ stets erfüllt ist.
<u>2. Schritt:</u> (Laurentreihenentwicklung in $R_{0,\rho}(1)$)
Wir bestimmen zunächst für jeden dieser Summanden die Laurentreihe. Für $j = 0$ ist (wegen $z_0 = 1$) die Laurentreihe schlicht und ergreifend durch $\frac{A_0}{z - z_0} = A_0(z-1)^{-1}$ gegeben. Für $j = 1, \dots, n-1$ erhalten wir aus der geometrischen Reihe (GR)

$$\begin{aligned}
\frac{A_j}{z - z_j} &= \frac{A_j}{(1 - z_j) + (z - 1)} = \frac{A_j}{(1 - z_j)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(z-1)}{(1-z_j)}} = \frac{A_j}{(1 - z_j)} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{(z-1)}{(1-z_j)}\right)} \\
&\overset{\text{(GR)}}{=} \frac{A_j}{(1 - z_j)} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{(z-1)}{(1-z_j)}\right)^k = \frac{A_j}{(1 - z_j)} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (1 - z_j)^{-k} (z-1)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} A_j (-1)^k (1 - z_j)^{-k-1} (z-1)^k \quad \forall\, j \in \mathbb{N} \text{ mit } j = 1, \dots, n-1
\end{aligned}$$

Dabei liegt die Begründung der Anwendung der geometrischen Reihe in $R_{0,\rho}(1)$ verborgen, denn es gilt:

$$\left|-\frac{(z-1)}{(1-z_j)}\right| < 1 \iff |z - 1| < |1 - z_j| = \left|1 - e^{j\frac{2\pi i}{n}}\right| = \sqrt{2 - 2\cos\left(j\frac{2\pi}{n}\right)} \quad \forall\, j = 1, \dots, n-1$$

Die vollständige Laurentreihen-Entwicklung erhalten wir jetzt aus unseren bisherigen Resultaten durch:

$$\begin{aligned}
f(z) = \frac{1}{z^n - 1} &= \frac{1}{z - z_0} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{A_j}{z - z_j} = (z-1)^{-1} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} A_j (-1)^k (1 - z_j)^{-k-1} (z-1)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{n-1} A_j (-1)^k (1 - z_j)^{-k-1} (z-1)^{k-1} = \sum_{k=-1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n-1} A_j (-1)^{k+1} (1 - z_j)^{-k-2} (z-1)^k \\
&= \sum_{k=-1}^{\infty} \underbrace{(-1)^{k+1} \left[\sum_{j=1}^{n-1} A_j (1 - z_j)^{-k-2}\right]}_{=:a_k} (z-1)^k
\end{aligned}$$

Das Residuum erhalten wir jetzt direkt aus a_{-1}, wobei a_{-1} den Koeffizienten von $(z-1)^{-1}$ bezeichnet.

$$\operatorname{Res}_1\left(\frac{1}{z^n - 1}\right) = a_{-1} = A_0 = \frac{1}{n}$$

3. MÖGLICHKEIT: (Cauchysche Integralformel für (Kreisscheiben)).
Betrachte $U := \mathbb{C}$, $f : U \to \mathbb{C}$ mit $f(z) := \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} z^k}$ holomorph auf $\mathbb{C}$, $c := 1 \in U$, $B := B_\rho(1) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| < \rho\}$ offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt $c = 1$ und Radius $\rho > 0$ beliebig klein mit

$$\rho < \left|1 - e^{\frac{2\pi i}{n}}\right| = \sqrt{\left(\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) - 1\right)^2 + \left(\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)^2}$$

$\overline{B} \subset U$, $\zeta := 1 \in B$. Dann folgt aus der Cauchyschen Integralformel (für Kreisscheiben) (CIF):

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_1\left(\frac{1}{z^n - 1}\right) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-1|=\rho} \frac{1}{z^n - 1} dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-1|=\rho} \frac{1}{(z-1)\sum_{k=0}^{n-1} z^k} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-1|=\rho} \frac{\frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} z^k}}{(z-1)} dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_\rho(1)} \frac{\frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} z^k}}{(z-1)} dz \overset{\text{(CIF)}}{=} \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i \cdot \underbrace{\frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} 1^k}}_{=f(1)=\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\end{aligned}$$

AUFGABE 47

Berechnen Sie die folgenden Integrale (mit Hilfe des Residuensatzes):

$$(1): \int_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z^4 - 1} dz$$

$$(2): \int_{|z|=2} e^{\left(\frac{1}{z^2}\right)} dz$$

Lösung:

Erinnerung:

Residuensatz: $U \subset \mathbb{C}$ offen, β nullhomologer Integrationsweg (d.h. β geschlossener Integrationsweg, $\operatorname{Sp}(\beta) \subset U$ und $\operatorname{int}(\beta) \subset U$), $A \subset U$ diskret in U (d.h. A besitzt keine Häufungspunkte in U) und $A \cap \operatorname{Sp}(\beta) = \emptyset$, $f : U \backslash A \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt:

(1): $M := A \cap \operatorname{int}(\beta)$ besteht aus endlich vielen Punkten

(2): $\displaystyle\int_\beta f(z)\, dz = 2\pi i \cdot \sum_{c \in M} \operatorname{Ind}_\beta(c) \cdot \operatorname{Res}_c(f)$

Rechenregel 1: $U \subset \mathbb{C}$ offen, $c \in U$, $m \in \mathbb{N}$ und $f : U \to \mathbb{C}$ meromorph. Dann gilt:

$$f \text{ besitzt in } c \text{ einen Pol } m\text{-ter Ordnung} \implies \operatorname{Res}_c(f) = \lim_{z \to c} \frac{1}{(m-1)!} \cdot \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z-c)^m \cdot f(z)\right)$$

zu (1): Betrachte $U := \mathbb{C}$ offen. Für den Integrationsweg

$$\beta := \partial B_{\frac{1}{2}}(i) : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \text{ mit } \beta(t) := i + \frac{1}{2}e^{it}$$

- dieser ist gleichbedeutend mit $|z - i| = \frac{1}{2}$ - gilt offenbar, dass β geschlossen ist (denn: $\beta(0) = \beta(2\pi) = \frac{1}{2} + i$), $\operatorname{Sp}(\beta) \subset U$ (denn: $\operatorname{Sp}(\beta) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| = \frac{1}{2}\} \subset \mathbb{C}$) und $\operatorname{int}(\beta) \subset U$ (denn: $\operatorname{int}(\beta) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| < \frac{1}{2}\} \subset \mathbb{C}$). Betrachte die Menge $A := \{-1, 1, -i, i\}$ aller Polstellen der Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z^4 - 1} = \frac{1}{(z-1)(z+1)(z-i)(z+i)}$$

Offenbar gilt, dass A diskret in U ist (denn: Jede endliche Menge ist diskret) und die Bedingung $A \cap \operatorname{Sp}(\beta) = \emptyset$ erfüllt ist (denn: $\{-1, 1, -i, i\} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| = \frac{1}{2}\} = \emptyset$). Desweiteren ist die Funktion $f : \mathbb{C}\backslash\{-1, 1, -i, i\} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) := \frac{1}{z^4 - 1}$ holomorph auf $\mathbb{C}\backslash\{-1, 1, -i, i\}$ (bzw. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ meromorph auf $\mathbb{C}$). Der Residuensatz liefert uns zunächst, dass die Menge $M := A \cap \operatorname{int}(\beta)$ aus endlich vielen Punkten besteht (denn: $M := \{-1, 1, -i, i\} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| < \frac{1}{2}\} = \{i\}$) und weiter folgt aus ihm

$$\oint_{\partial B_{\frac{1}{2}}(i)} \frac{1}{z^4 - 1}\, dz = 2\pi i \cdot \operatorname{Ind}_{\partial B_{\frac{1}{2}}(i)}(i) \cdot \operatorname{Res}_i \left(\frac{1}{z^4 - 1}\right) = 2\pi i \cdot \frac{i}{4} \cdot \underbrace{\operatorname{Ind}_{\partial B_{\frac{1}{2}}(i)}(i)}_{\in \mathbb{Z}} \in -\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$$

Hierbei erhalten wir den Wert des Residuums aus der obigen Rechenregel 1. Der Vollständigkeit (und zur Übung) berechnen wir alle 4 Residuen von f: Da f in den Punkten $-1, 1, -i, i$ jeweils Pole erster Ordnung besitzt gilt nach der obigen Rechenregel mit $m = 1$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_{-1}\left(\frac{1}{z^4 - 1}\right) &= \lim_{z \to -1} (z + 1) \cdot \frac{1}{z^4 - 1} = \lim_{z \to -1} \frac{1}{(z - 1)(z - i)(z + i)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - i^2} = -\frac{1}{4} \\
\operatorname{Res}_{1}\left(\frac{1}{z^4 - 1}\right) &= \lim_{z \to 1} (z - 1) \cdot \frac{1}{z^4 - 1} = \lim_{z \to 1} \frac{1}{(z + 1)(z - i)(z + i)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - i^2} = \frac{1}{4} \\
\operatorname{Res}_{-i}\left(\frac{1}{z^4 - 1}\right) &= \lim_{z \to -i} (z + i) \cdot \frac{1}{z^4 - 1} = \lim_{z \to -i} \frac{1}{(z + 1)(z - 1)(z - i)} = \frac{1}{-2i} \cdot \frac{1}{-2} = \frac{1}{4i} = -\frac{i}{4} \\
\operatorname{Res}_{i}\left(\frac{1}{z^4 - 1}\right) &= \lim_{z \to i} (z - i) \cdot \frac{1}{z^4 - 1} = \lim_{z \to i} \frac{1}{(z + 1)(z - 1)(z + i)} = \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{-2} = -\frac{1}{4i} = \frac{i}{4}
\end{aligned}$$

zu (2): Betrachte $U := \mathbb{C}$ offen. Für den Integrationsweg

$$\beta := \partial B_2(0) : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \text{ mit } \beta(t) := 2e^{it}$$

- dieser ist gleichbedeutend mit $|z| = 2$ - gilt offenbar, dass β geschlossen ist (denn: $\beta(0) = \beta(2\pi) = 2$), $\operatorname{Sp}(\beta) \subset U$ (denn: $\operatorname{Sp}(\beta) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\} \subset \mathbb{C}$) und $\operatorname{int}(\beta) \subset U$ (denn: $\operatorname{int}(\beta) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2\} \subset \mathbb{C}$). Betrachte die Menge $A := \{0\}$, die die einzige Singularität der Funktion

$$f(z) = e^{\left(\frac{1}{z^2}\right)}$$

enthält. Offenbar gilt, dass A diskret in U ist (denn: Jede endliche Menge ist diskret) und die Bedingung $A \cap \operatorname{Sp}(\beta) = \emptyset$ erfüllt ist (denn: $\{0\} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\} = \emptyset$). Desweiteren ist die Funktion $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = e^{\left(\frac{1}{z^2}\right)}$ holomorph auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ (bzw. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ meromorph auf $\mathbb{C}$). Der Residuensatz liefert uns zunächst, dass die Menge $M := A \cap \operatorname{int}(\beta)$ aus endlich vielen Punkten besteht (denn: $M := \{0\} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2\} = \{0\}$) und weiter folgt aus ihm

$$\oint_{\partial B_2(0)} e^{\left(\frac{1}{z^2}\right)}\, dz = 2\pi i \cdot \operatorname{Ind}_{\partial B_2(0)}(0) \cdot \operatorname{Res}_0 \left(e^{\left(\frac{1}{z^2}\right)}\right) = 2\pi i \cdot 0 \cdot \underbrace{\operatorname{Ind}_{\partial B_2(0)}(0)}_{\in \mathbb{Z}} = 0$$

Hierbei erhalten wir den Wert des Residuums wie folgt: Zunächst besitzt die Funktion $e^{\left(\frac{1}{z^2}\right)}$ in 0 weder einen Pol noch eine hebbare Singularität, sondern eine wesentliche Singularität, da für die zugehörige Laurentreihe um 0

$$e^{\left(\frac{1}{z^2}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z^2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-2n} = \sum_{n=0}^{-\infty} \underbrace{\frac{1}{(-n)!}}_{=:a_{2n}} z^{2n}$$

für unendlich viele $n \in \mathbb{Z}$ mit $n < 0$ die Bedingung $a_n \neq 0$ erfüllt ist. Damit erhalten wir das Residuum aus a_{-1}

$$\operatorname{Res}_0 \left(e^{\left(\frac{1}{z^2}\right)}\right) = a_{-1} = 0$$