# Aufgabe 15:

$$(15.1)\qquad y'' + y + \varepsilon(y^2-1)y' = 0\,, \quad y(0)=w\,,\quad y'(0)=0$$

Es bezeichne $\bar{y} = \bar{y}(\cdot\,;\varepsilon)$ die Lösung von (15.1) für $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$, $\varepsilon_0>0$.
Dann löst $\bar{y}(\cdot\,;0)$ die AWA $\; y''+y=0\,,\; y(0)=\bar{y}\,,\; y'(0)=0$
Definiere:

$$\mathcal{F}(y;\varepsilon) := y'' + y + \varepsilon(y^2-1)y'$$

## Asymptotische Entwicklung (bzgl. $\varepsilon$ für $\varepsilon \to 0$):

Ansatz:

$$(15.2)\qquad y^N(\tau;\varepsilon) := \sum_{j=0}^{N} y_j(\tau)\cdot\varepsilon^j$$

Bestimme $y_j \in C^2$ $(j=0,\dots,N)$ derart, dass

$$\mathcal{F}(y^N;\varepsilon) = o(\varepsilon^N). \quad \text{für } \varepsilon \to 0$$

### N=0:

Differentialgleichungen:

$$\mathcal{F}(y^0;\varepsilon) = (y^0)'' + y^0 + \varepsilon\left(((y^0)^2-1)\cdot(y^0)'\right)$$

$$\underset{\uparrow}{=} \left[(y^0)''+y^0\right]\cdot\varepsilon^0 + R_0(\mathcal{F}(y^0;\cdot),\varepsilon,0)$$

Taylorentw. von $\mathcal{F}$ in $\varepsilon=0$ der Ord. $N=0$

$$\underset{(15.2)}{=} \underbrace{\left[y_0''+y_0\right]}_{\overset{!}{=}0}\cdot\varepsilon^0 + \underbrace{R_0(\mathcal{F}(y^0;\cdot),\varepsilon,0)}_{=o(\varepsilon^0)}$$

Anfangsbedingungen:

$$w\cdot\varepsilon^0 = w \overset{!}{=} y^0(0;\varepsilon) \underset{(15.2)}{=} y_0(0)\cdot\varepsilon^0 \Rightarrow y_0(0)=w$$

$$0\cdot\varepsilon^0 = 0 \overset{!}{=} (y^0)'(0;\varepsilon) \underset{(15.2)}{=} y_0'(0)\cdot\varepsilon^0 \Rightarrow y_0'(0)=0$$

Anfangswertaufgaben für die Koeffizienten:

$o(\varepsilon^0)$ $\qquad y_0''+y_0=0\,,\quad y_0(0)=w\,,\quad y_0'(0)=0$

$$\Rightarrow \boxed{y_0(\tau) = w\cdot\cos(\tau)} \qquad \left(\text{insbesondere gilt damit } y_0(\tau) = \bar{y}(\tau;0)\right)$$

$$\Rightarrow y^0(\tau;\varepsilon) = w\cdot\cos(\tau)$$

### N=1:

Differentialgleichungen:

$$\mathcal{F}(y^1;\varepsilon) = (y^1)'' + y^1 + \varepsilon\left(((y^1)^2-1)\cdot(y^1)'\right)$$

$$\underset{\uparrow}{=} \underbrace{\left[(y^1)''+y^1\right]}_{=:f_0(y^1)}\cdot\varepsilon^0 + \frac{1}{1!}\underbrace{\left[\left((y^1)^2-1\right)\cdot(y^1)'\right]}_{=:f_1(y^1)}\varepsilon^1 + R_1(\mathcal{F}(y^1;\cdot),\varepsilon,0)$$

Taylorentw. von $\mathcal{F}$ in $\varepsilon=0$ der Ord. $N=1$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Taylorentw. von } f_i\\ \text{in } y=\bar{y}(\cdot;0) \text{ der}\\ \text{Ord. } N-i\\ i\in\{0,1\}}}{=} \left[\bar{y}''(\cdot;0)+\bar{y}(\cdot;0)+\frac{1}{1!}\cdot\left(\left(y^1-\bar{y}(\cdot;0)\right)''+\left(y^1-\bar{y}(\cdot;0)\right)\right)+R_1(f_0,y^1,\bar{y}(\cdot;0))\right]\cdot\varepsilon^0$$

$$+\frac{1}{1!}\left[\left(\bar{y}^2(\cdot;0)-1\right)\cdot\bar{y}'(\cdot;0)+R_0(f_1,y^1,\bar{y}(\cdot;0))\right]\cdot\varepsilon^1$$

$$+R_1(\mathcal{F}(y^1;\cdot),\varepsilon,0)$$

$$\underset{(15.2)}{=}\left[\bar{y}''(\cancel{\cdot};0)+\bar{y}(\cancel{\cdot};0)+y_0''+y_0-\bar{y}''(\cancel{\cdot};0)-\bar{y}(\cancel{\cdot};0)\right]\cdot\varepsilon^0$$

$$+\left[y_1''+y_1+\underbrace{\left(\bar{y}^2(\cdot;0)-1\right)\cdot\bar{y}'(\cdot;0)}_{=(y_0^2-1)\cdot y_0'}\right]\cdot\varepsilon^1 \quad (\text{da } y_0(\tau)=\bar{y}(\tau;0))$$

$$+\underbrace{R_1(f_0,y^1,\bar{y}(\cdot;0))}_{\substack{=\mathcal{O}(|y^1-\bar{y}(\cdot;0)|)\\ \underset{(15.2)}{=}\mathcal{O}(|y_1|\cdot\varepsilon)=\mathcal{O}(\varepsilon)}}+\underbrace{\varepsilon^1\cdot\underbrace{R_0(f_1,y^1,\bar{y}(\cdot;0))}_{\substack{=\mathcal{O}(|y^1-\bar{y}(\cdot;0)|^0)=\mathcal{O}(1)\\ =\mathcal{O}(\varepsilon^0)}}}_{=\mathcal{O}(\varepsilon^1)}+\underbrace{R_1(\mathcal{F}(y^1;\cdot),\varepsilon,0)}_{=\mathcal{O}(\varepsilon^1)}$$

$$=\underbrace{\left[y_0''+y_0\right]}_{\stackrel{!}{=}0}\cdot\varepsilon^0+\underbrace{\left[y_1''+y_1+(y_0^2-1)\cdot y_0'\right]}_{\stackrel{!}{=}0}\cdot\varepsilon^1+\mathcal{O}(\varepsilon^1)$$

Anfangsbedingungen:

$$W\cdot\varepsilon^0+0\cdot\varepsilon^1=W\stackrel{!}{=}y^1(0;\varepsilon)\underset{(15.2)}{=}y_0(0)\cdot\varepsilon^0+y_1(0)\cdot\varepsilon^1 \underset{\text{Koeffizienten-vergleich}}{\Longrightarrow} y_0(0)=W,\ y_1(0)=0$$

$$0\cdot\varepsilon^0+0\cdot\varepsilon^1=0\stackrel{!}{=}(y^1)'(0;\varepsilon)=y_0'(0)\cdot\varepsilon^0+y_1'(0)\cdot\varepsilon^1 \Longrightarrow y_0'(0)=0,\ y_1'(0)=0$$

Anfangswertaufgaben für die Koeffizienten:

$\mathcal{O}(\varepsilon^0)$ $\quad y_0''+y_0=0 \quad , \quad y_0(0)=W \ , \ y_0'(0)=0$

$\mathcal{O}(\varepsilon^1)$ $\quad y_1''+y_1=(1-y_0^2)y_0' \quad , \quad y_1(0)=0 \ , \ y_1'(0)=0$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} y_0(\tau)&=W\cdot\cos(\tau) \quad , \\ y_1(\tau)&=-\frac{W}{8}\left(W^2\cos^2(\tau)\sin(\tau)+(W^2-4)\tau\cos(\tau)+(4-2W^2)\sin(\tau)\right)\end{aligned}}$$

$$\Rightarrow y^1(\tau;\varepsilon)=y_0(\tau)+y_1(\tau)\cdot\varepsilon=\cdots$$

<u>$N=2$</u>:

Differentialgleichungen:

$$\mathcal{F}(y^2;\varepsilon)=(y^2)''+y^2+\varepsilon\left((y^2)^2-1\right)\cdot(y^2)'$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Taylorentw. von } \mathcal{F}\\ \text{in } \varepsilon=0 \text{ der Ord. } N=2}}{=}\underbrace{\left[(y^2)''+y^2\right]}_{=:f_0(y^2)}\cdot\varepsilon^0+\frac{1}{1!}\underbrace{\left[\left((y^2)^2-1\right)\cdot(y^2)'\right]}_{=:f_1(y^2)}\cdot\varepsilon^1+\frac{1}{2!}\cdot\underbrace{0}_{=0=:f_2(y^2)}\cdot\varepsilon^2+R_2(\mathcal{F}(y^2;\cdot),\varepsilon,0)$$

$$= \Big[\bar y''(\cdot;0)+\bar y(\cdot;0)+\frac{1}{1!}\Big((y^2-\bar y(\cdot;0))''+(y^2-\bar y(\cdot;0))\Big)+\frac{1}{2!}\cdot 0\cdot(y^2-\bar y(\cdot;0))^2 + R_2(f_0,y^2,\bar y(\cdot;0))\Big]\cdot\varepsilon^0$$

Taylorentw. von $f_i$ in $y=\bar y(\cdot;0)$ der Ord. $N-i$, $i\in\{0,1,2\}$

$$+\frac{1}{1!}\Big[(\bar y^2(\cdot;0)-1)\cdot\bar y'(\cdot;0)+\frac{1}{1!}\Big(2\bar y(\cdot;0)\cdot\bar y'(\cdot;0)\cdot(y^2-\bar y(\cdot;0))+(\bar y^2(\cdot;0)-1)(y^2-y(\cdot;0))'\Big) + R_1(f_1,y^2,\bar y(\cdot;0))\Big]\cdot\varepsilon^1$$

$$+R_2(F(y^2;\cdot),\varepsilon,0)$$

$$\underset{(15.2)}{=} \bar y''(\cdot;0)+\bar y(\cdot;0)+y_0''+y_1''\cdot\varepsilon^1+y_2''\cdot\varepsilon^2-\bar y''(\cdot;0)+y_0+y_1\cdot\varepsilon^1+y_2\cdot\varepsilon^2-\bar y(\cdot;0)$$

$\mathcal{O}(\varepsilon^0)$

$\mathcal{O}(\varepsilon^1)$

$\mathcal{O}(\varepsilon^2)$

$\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ Restterme

$$+(\bar y^2(\cdot;0)-1)\cdot\bar y'(\cdot;0)\cdot\varepsilon^1-2\bar y^2(\cdot;0)\cdot\bar y'(\cdot;0)\,\varepsilon^1+2\bar y(\cdot;0)\bar y'(\cdot;0)\,y_0\,\varepsilon^1$$

$$+2\bar y(\cdot;0)\bar y'(\cdot;0)\cdot y_1\,\varepsilon^2+2\bar y(\cdot;0)\bar y'(\cdot;0)\,y_2\,\varepsilon^3-(\bar y^2(\cdot;0)-1)\bar y'(\cdot;0)\,\varepsilon^1$$

$$+(\bar y^2(\cdot;0)-1)\cdot y_0'\,\varepsilon^1+(\bar y^2(\cdot;0)-1)\,y_1'\,\varepsilon^2+(\bar y^2(\cdot;0)-1)\,y_2'\,\varepsilon^3$$

$$+R_2(f_0,y^2,\bar y(\cdot;0))+\varepsilon^1\cdot R_1(f_1,y^2,\bar y(\cdot;0))+R_2(F(y^2;\cdot),\varepsilon,0)$$

$$\underset{\bar y(\tau;0)=y_0(\tau)}{=}\Big[\cancel{\bar y''}+\cancel{\bar y}+\underbrace{y_0''+y_0}_{\overset{!}{=}0}-\cancel{\bar y''}-\cancel{\bar y}\Big]\cdot\varepsilon^0$$

$$+\Big[\underbrace{y_1''+y_1+(y_0^2-1)\cdot y_0'}_{\overset{!}{=}0}-\cancel{2y_0^2\cdot y_0'}+\cancel{2y_0^2 y_0'}-\cancel{(y_0^2-1)y_0'}+\cancel{(y_0^2-1)y_0'}\Big]\cdot\varepsilon^1$$

$$+\Big[\underbrace{y_2''+y_2+2y_0y_0'y_1+(y_0^2-1)\cdot y_1'}_{\overset{!}{=}0}\Big]\cdot\varepsilon^2$$

$$+\mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Anfangsbedingungen:

$$w\cdot\varepsilon^0+0\cdot\varepsilon^1+0\cdot\varepsilon^2=w\overset{!}{=}y^2(0;\varepsilon)=y_0(0)\cdot\varepsilon^0+y_1(0)\cdot\varepsilon^1+y_2(0)\cdot\varepsilon^2 \Rightarrow y_0(0)=w,\ y_1(0)=0,\ y_2(0)=0$$

$$0\cdot\varepsilon^0+0\cdot\varepsilon^1+0\cdot\varepsilon^2=0\overset{!}{=}(y^2)'(0;\varepsilon)=y_0'(0)\cdot\varepsilon^0+y_1'(0)\cdot\varepsilon^1+y_2'(0)\,\varepsilon^2 \Rightarrow y_j'(0)=0,\quad j=0,1,2$$

Anfangswertaufgaben für die Koeffizienten:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\mathcal{O}(\varepsilon^0)$ | $y_0''+y_0=0$ | $y_0(0)=w$ | $y_0'(0)=0$ |
| $\mathcal{O}(\varepsilon^1)$ | $y_1''+y_1=(1-y_0^2)y_0'$ | $y_1(0)=0$ | $y_1'(0)=0$ |
| $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ | $y_2''+y_2=(1-y_0^2)y_1'-2y_0y_0'y_1$ | $y_2(0)=0$ | $y_2'(0)=0$ |

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} y_0(\tau)&=\text{siehe oben}\\ y_1(\tau)&=\text{siehe oben}\\ y_2(\tau)&=\frac{w}{768}\Big(-20w^4\cos^5(\tau)+36\tau w^4\sin(\tau)\cos^2(\tau)+85w^4\cos^3(\tau)\\&\quad+18\tau^2w^4\cos(\tau)-144\tau w^2\sin(\tau)\cos^2(\tau)-9\tau w^4\sin(\tau)\\&\quad-168w^2\cos^3(\tau)-96w^2\tau^2\cos(\tau)-65w^4\cos(\tau)+72\tau w^2\sin(\tau)\\&\quad+96\tau^2\cos(\tau)+168w^2\cos(\tau)-96\tau\sin(\tau)\Big)\end{aligned}}$$

$$\Rightarrow y^2(\tau;\varepsilon)=y_0(\tau)\cdot\varepsilon^0+y_1(\tau)\cdot\varepsilon^1+y_2(\tau)\cdot\varepsilon^2$$