

Übungen zur Vorlesung Numerik I

Sommersemester 2010

PD Dr. Thorsten Hüls
Dipl.-Math. Denny Otten

Übungsblatt 2
22.04.2010

Abgabe: Donnerstag, 29.04.2010, 10:00 Uhr in das Postfach des jeweiligen Tutors.
Mo.-Tutorium: Paul Voigt, paulvoigt@web.de, Postfach 195 in V3-128
Di.-Tutorium: Denny Otten, dotten@math.uni-bielefeld.de, Postfach 44 in V3-128
Mi.-Tutorium: Ingwar Petersen, ipeterse@math.uni-bielefeld.de, Postfach 227 in V3-128

Aufgabe 4: (Rundungsfehler der Gleitkommaarithmetik)

Sei $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$ gerade, $G(\tau, b)$ die Menge der Gleitkommazahlen zur Basis b mit Mantissenlänge τ und sei $\text{rd} : \mathbb{R} \rightarrow G(\tau, b)$ die übliche Rundungsvorschrift.

Man zeige für alle $t \in \mathbb{R}$:

$$|t - \text{rd}(t)| \leq |t - g| \quad \forall g \in G(\tau, b). \quad (1)$$

Hinweis: Es empfiehlt sich, folgendermaßen vorzugehen:

- (i) Zeigen Sie: Gilt (1) für $t > 0$, so auch für $t < 0$.
- (ii) Wählen Sie für $t \in \mathbb{R}$ eine *geeignete* Darstellung der Form $t = b^n \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j b^{-j}$.
- (iii) Zeigen Sie: Zu jedem $g \in G(\tau, b)$ gibt es ein $g' \in G(\tau, b) \cap [b^{n-1}, \infty)$, so dass $|g' - t| \leq |g - t|$.
- (iv) Zeigen Sie für $g, g' \in G(\tau, b) \cap [b^{n-1}, \infty)$ mit $g \neq g'$, dass $|g - g'| \geq b^{n-\tau}$ gilt.
- (v) Beweisen Sie nun (1) mit Hilfe von Skript, Satz 2.3 für alle $g \in G(\tau, b) \cap [b^{n-1}, \infty)$ mit $g \neq \text{rd}(t)$.

(6 Punkte)

Aufgabe 5: (Berechnung von Konditionszahlen)

(a) Berechnen Sie die relative komponentenweise Konditionszahl $\hat{\kappa}(F, x)$ für die folgenden Auswertungsprobleme:

- (i) $F : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F(x) = ax^n \sqrt{bx}$, $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b > 0$, $n \in \mathbb{N}_0$.
- (ii) $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{ax_1^n}{bx_2^m}$, $x_2 \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b \neq 0$, $n, m \in \mathbb{N}$.
- (iii) $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $F(x) = \begin{pmatrix} \text{sech}(x) \\ \tanh(x) \end{pmatrix}$.

(b) Betrachten Sie die aus der Aufgabe 2 bekannte Iteration

$$x^{(n)} = f_{a,b}(x^{(n-1)}), \quad n = 1, 2, \dots$$

mit

$$f_{a,b} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f_{a,b} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ax_1 \\ -(b - a^2)x_1^2 + bx_2 \end{pmatrix}$$

und dem Anfangswert $x^{(0)} = \begin{pmatrix} c \\ c^2 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die relative komponentenweise Konditionszahl $\widehat{\kappa}$ des Auswertungsproblems $\left(f_{a,b}, \begin{pmatrix} c \\ c^2 \end{pmatrix} \right)$.

Setzen Sie nun $a = \frac{1}{2}$, $b = 2$, $c = 2$ und berechnen Sie die Kondition $\widetilde{\kappa}(0)$ der Gesamtiteration, also des Auswertungsproblems

$$\left(\underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n\text{-mal}}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right).$$

Hinweis: Vgl. Skript, Formel (2.22), sowie die explizite Darstellung der Folge $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}_0}$ aus Aufgabe 2.

Wie verhält sich die Konditionszahl $\widetilde{\kappa}(0)$ für $n \rightarrow \infty$?

(6 Punkte)

Aufgabe 6: (Programmieraufgabe, Kondition von Auswertungsproblemen)

Man betrachte noch einmal das Beispiel zur Berechnung der Lösung $F(p, q) = -p + \sqrt{p^2 + q}$ der quadratischen Gleichung $t^2 + 2pt - q = 0$ für $q > 0, p \in \mathbb{R}$.

Zwei Algorithmen sind gegeben durch:

Algorithmus 1: $F^1(p, q) = (p, \sqrt{p^2 + q})$, $F^2(y_1, y_2) = y_2 - y_1$.

Algorithmus 2: $F^1(p, q) = (p, q, \sqrt{p^2 + q})$, $F^2(y_1, y_2, y_3) = \frac{y_2}{y_1 + y_3}$.

In der Vorlesung wurden die Konditionszahlen bereits im Fall $p > 0$ untersucht. Bestimmen Sie nun für $p < 0 < q$

- die relative Kondition des Auswertungsproblems $\widehat{\kappa}(F, (p, q))$,
- die relativen Konditionszahlen $\widehat{\kappa}_1 = \widehat{\kappa}(F^1, (p, q))$ und $\widehat{\kappa}_2 = \widehat{\kappa}(F^2, F^1(p, q))$ zum Algorithmus 1,
- die relativen Konditionszahlen $\widehat{\kappa}_1$ und $\widehat{\kappa}_2$ zum Algorithmus 2.

Welcher Algorithmus ist in diesem Fall gutartig?

(d) Berechnen Sie mit Hilfe der Rundungsfehler-GUI die Werte der beiden Algorithmen zur Mantissenlänge 8 für $q = 1$, $p = -10, -100, -1000$. Interpretieren Sie die Ergebnisse.

(6 Punkte)