Aufgaben zur Vorlesung
Numerik II
Wintersemester 2012/13
Übungsblatt 1

W.-J. Beyn
D. Otten

Abgabe: Mittwoch, 17.10.2012, vor Beginn der Vorlesung

Übung: Mi. 12:15–13:45, V5-148

Aufgabe 1: [Lineare Differentialgleichungen]

Benutzen Sie die Theorie der linearen Anfangswertaufgaben, um die Lösungen der folgenden Aufgaben zu berechnen:

a) $u'(t) = -\alpha u(t) + t^2$, $u(0) = \frac{1+2\alpha}{\alpha^4}$, $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$,

b) $\begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$,

c) $\begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

(6 Punkte)

Aufgabe 2: [Existenz und Eindeutigkeit]

Betrachten Sie die Anfangswertaufgaben

a) $u'(t) = \sqrt{|t|}\cos^2(u(t))$, $u(0) = u^0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,

b) $u'(t) = \sqrt{|u(t)|}\sin^2(t)$, $u(0) = u^0 > 0$.

Zeigen Sie, dass die Nichtlinearität f in $C^{0,1}(\Omega \times D, \mathbb{R})$ liegt, wenn man die offenen Intervalle Ω und D geeignet wählt (wie?). Somit ist der lokale Existenz- und Eindeutigkeitssatz anwendbar. Berechnen Sie die Lösungen auf möglichst großen Existenzintervallen (Trennung der Veränderlichen).

(6 Punkte)

Aufgabe 3: [Richtungsfeld]

a) Skizzieren Sie das Richtungsfeld (mindestens 15 Pfeile) der folgenden Differentialgleichung und markieren Sie die Lösungskurve, die durch den Punkt $t = 1$, $u = 3$ verläuft!
$u' = (1 - t^2)u, \quad t \in [0, 3], u \in [-1, 4]$.

b) Skizzieren Sie das projizierte Richtungsfeld der folgenden Differentialgleichung und markieren Sie die Bereiche, in denen waagerechte bzw. senkrechte Pfeile vorkommen.
$u_1' = u_1 u_2$,
$u_2' = u_2 - u_1, \quad u_1, u_2 \in [-1, 1]$.

Für beide Aufgaben können Sie in MATLAB eine geeignete NUMLAB-GUI verwenden.

(6 Punkte)

Numerik II (WS 12/13)

Übungsblatt 01

Lösungen

Aufgabe 1:

a) $$\boxed{u'(t) = -\alpha u(t) + t^2, \quad u(0) = \frac{1+2\alpha}{\alpha^4}, \quad 0 \neq \alpha \in \mathbb{R}.}$$

($\rightarrow$ inhomogene lineare gewöhnliche DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten)

allg.: $u'(t) = A(t)\cdot u(t) + b(t)$, $t \in I$, $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall, $A \in C(I, \mathbb{K}^{n\times n})$, $b \in C(I, \mathbb{K}^n)$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$,

Lösung lässt sich mittels „Variation der Konstanten" bestimmen (siehe: O. Forster, Analysis 2, II. §.11 Satz 3). II. §.12 Satz 1

$t_0 \in I$, $c \in \mathbb{K}^n \Rightarrow \exists_1$ Lösung u mit $\left\{\begin{array}{l} u'(t) = A(t)u(t) + b(t) \\ u(t_0) = c \end{array}\right\}$

① : (**homogene DGL**): $u'(t) = -\alpha u(t)$

Lösung: $$\varphi(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} -\alpha \, ds\right) = e^{-\alpha(t-t_0)}$$

② : (**inhomogene DGL**)

Lösung: $$u(t) = \varphi(t)\cdot\left(u_0 + \int_{t_0}^{t} \varphi^{-1}(s)\cdot s^2 \, ds\right)$$ nach Skript Satz 1.4(iii), oder Forster, Analysis 2, II. §.11 Satz 3

$$= e^{-\alpha(t-t_0)}\left(u_0 + e^{-\alpha t_0}\int_{t_0}^{t} e^{\alpha s}\, s^2 \, ds\right)$$

$$\overset{\text{partielle Integr.}}{=} e^{-\alpha(t-t_0)}\left(u_0 + \left[\frac{(2-2\alpha s+s^2\alpha^2}{\alpha^3}\cdot e^{\alpha(s-t_0)}\right]_{s=t_0}^{t}\right)$$

$$= e^{-\alpha(t-t_0)}\left(u_0 + \frac{2-2\alpha t+t^2\alpha^2}{\alpha^3}\cdot e^{\alpha(t-t_0)} - \frac{2-2\alpha t_0+t_0^2\alpha^2}{\alpha^3}\right)$$

③ : (**Anfangsdaten**): $t_0 = 0$, $u_0 = u(0) = \frac{1+2\alpha}{\alpha^4}$

Lösung: $$u(t) = e^{-\alpha t}\left(\frac{1+2\alpha}{\alpha^4} + \frac{2-2\alpha t+t^2\alpha^2}{\alpha^3}\cdot e^{\alpha t} - \frac{2}{\alpha^3}\right)$$

$$= \frac{2-2\alpha t+t^2\alpha^2}{\alpha^3} + \frac{1}{\alpha^4}\cdot e^{-\alpha t}$$

$$= \frac{2}{\alpha^3} - \frac{2}{\alpha^2}t + \frac{1}{\alpha}\cdot t^2 + \frac{1}{\alpha^4}\cdot e^{-\alpha t}$$

④ : (**Probe**): $u(t) = \frac{2}{\alpha^3} - \frac{2}{\alpha^2}t + \frac{1}{\alpha}\cdot t^2 + \frac{1}{\alpha^4}\cdot e^{-\alpha t}$

Lösung: $$u'(t) = -\frac{2}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha}\cdot t - \frac{1}{\alpha^3}\cdot e^{-\alpha t} - t^2 + t^2$$

$$= -\alpha\cdot\left(\frac{2}{\alpha^3} - \frac{2}{\alpha^2}\cdot t + \frac{1}{\alpha}\cdot t^2 + \frac{1}{\alpha^4}\cdot e^{-\alpha t}\right) + t^2$$

$$= -\alpha u(t) + t^2 \quad \checkmark$$

$$u(0) = \frac{2}{\alpha^3} + \frac{1}{\alpha^4} = \frac{1+2\alpha}{\alpha^4}. \quad \checkmark$$

Alternative Möglichkeit:

① : (homogene DGL) : $u'(t) = -\alpha u(t)$

Lösung : $\varphi(t) = \exp\left(\int -\alpha \, dt\right) = C \cdot e^{-\alpha t}, \quad C \in \mathbb{R}.$

② : (inhomogene DGL) :

- Ansatz: $u(t) = C(t) \cdot e^{-\alpha t}$
- Einsetzen in $u'(t) = -\alpha u(t) + t^2$ liefert:

$$u'(t) = C'(t) \cdot e^{-\alpha t} - \alpha C(t) \cdot e^{-\alpha t}$$

$$\overset{!}{=} -\alpha u(t) + t^2 = -\alpha C(t) \cdot e^{-\alpha t} + t^2$$

Differentialgleichung für C (durch Addition von $\alpha C(t) e^{-\alpha t}$ & Multiplikation von $e^{\alpha t}$):

$$C'(t) = t^2 e^{\alpha t}$$

2-malige partielle Integration liefert

$$C(t) = \int C'(t)\, dt = \int \underbrace{t^2}_{g(t)} \underbrace{e^{\alpha t}}_{f'(t)} dt \overset{\text{p.I.}}{=} \underbrace{t^2}_{g(t)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\alpha} \cdot e^{\alpha t}}_{f(t)} - \int \underbrace{2t}_{g'(t)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\alpha} \cdot e^{\alpha t}}_{f(t)} dt$$

$$= \frac{t^2}{\alpha} \cdot e^{\alpha t} - \frac{2}{\alpha} \int \underbrace{t}_{g(t)} \cdot \underbrace{e^{\alpha t}}_{f'(t)} dt \overset{\text{p.I.}}{=} \frac{t^2}{\alpha} \cdot e^{\alpha t} - \frac{2}{\alpha}\left(\underbrace{t}_{g(t)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\alpha} \cdot e^{\alpha t}}_{f(t)} - \underbrace{\int \underbrace{1}_{g'(t)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\alpha} \cdot e^{\alpha t}}_{f(t)} dt}_{= \frac{1}{\alpha^2} e^{\alpha t} + C_1}\right)$$

$$= \left(\frac{t^2}{\alpha} - \frac{2t}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha^3}\right) e^{\alpha t} \underbrace{- \frac{2}{\alpha} \cdot C_1}_{=: C_2}$$

$$= \left(\frac{t^2}{\alpha} - \frac{2t}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha^3}\right) e^{\alpha t} + C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

- Der Ansatz liefert nun die

Lösung: $u(t) = C(t) \cdot e^{-\alpha t} = \frac{t^2}{\alpha} - \frac{2t}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha^3} + C_2 e^{-\alpha t}, \quad C_2 \in \mathbb{R}$

③ : (Anfangsdaten) : $t_0 = 0, \quad u_0 = u(0) = \frac{1 + 2\alpha}{\alpha^4} = \frac{1}{\alpha^4} + \frac{2}{\alpha^3}$

$$u(0) = \frac{2}{\alpha^3} + C_2 \overset{!}{=} \frac{1}{\alpha^4} + \frac{2}{\alpha^3} \Rightarrow C_2 = \frac{1}{\alpha^4}$$

Lösung: $u(t) = \frac{t^2}{\alpha} - \frac{2t}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha^3} + \frac{1}{\alpha^4} \cdot e^{-\alpha t}.$

④ : (Probe) : Siehe oben.

b) $$\boxed{\begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}}_{\text{Jordanblock ?}} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}}$$

1 : (homogene DGL):

Siehe Vorlesung (→ Matrixexponential von Jordanblöcken, Seite 13)

Lösung: $$Y(t) := e^{At} = \exp\left(\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} t\right)$$

$$= \exp\Bigg(\underbrace{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}}_{=:\,D \text{ diagonal}} t + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=:\,N \text{ nilpotent}} t\Bigg) \quad \& \quad DN = ND$$

Regel 1: Matrixexponential kommutativer Matrizen

$$\boxed{AB = BA \Rightarrow e^{A+B} = e^A e^B}$$

Regel 2: Matrixexponential von Diagonalmatrizen

$$= \exp\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} t\right) \cdot \exp\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t\right)$$

$$= \begin{pmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{at} \end{pmatrix} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^k$$

$$= \begin{pmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{at} \end{pmatrix} \cdot \left[I_2 + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

die Spalten bilden eine Basis des Lösungsraums

$$= \begin{pmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{at} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e^{at} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Fundamentalmatrix

E1 }

Beachte: $$\varphi(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} ds\right) = \exp\left(\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \int_{t_0}^{t} I_2 \, ds\right)$$

$$= \exp\left(\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot (t - t_0)\right) = e^{A(t-t_0)}$$

2 : (Anfangsdaten): $u(t) = Y(t) \cdot u_0$

Lösung: $$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = e^{at} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{at} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t e^{at} \\ e^{at} \end{pmatrix}$$

3 : (Probe): $u(t) = \begin{pmatrix} t e^{at} \\ e^{at} \end{pmatrix}$

Lösung: $$u'(t) = \begin{pmatrix} e^{at} + a t e^{at} \\ a e^{at} \end{pmatrix} = e^{at} \begin{pmatrix} 1 + at \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} e^{at} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} u(t) \quad \checkmark$$

$$u(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

E1 Einschub: Da $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} =: A = J$ bereits eine Jordanmatrix ist, die insbesondere aus einem einzigen Jordanblock besteht, gilt für die Fundamentalmatrix nach Satz 1.4 (iv):

$$Y(t) = e^{At} = e^{Jt} = e^{at} \cdot P_1(t) = e^{at} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

c) $$\boxed{\begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}}_{\text{diagonalisierbar!}} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a,b \in \mathbb{R}}$$

① : (**Diagonalisierung**): $A := \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$

- (Charakteristisches Polynom bestimmen):

  → charakteristisches Polynom:

  $$\det(A - \lambda I_2) = \det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & a-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)^2 - b^2 = \lambda^2 - 2a\lambda + a^2 - b^2$$

- (Eigenwerte bestimmen): $$= (\lambda - (a+b)) \cdot (\lambda - (a-b)) \overset{!}{=} 0$$

  → Eigenwerte ($\hat{=}$ Nullstellen des char. Polynoms):

  $\lambda_1 = a+b$

  $\lambda_2 = a-b$

- (Eigenvektoren bestimmen): $(A - \lambda I_2)v = 0$

  i) $$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (A - \lambda_1 I_2)v_1 = \begin{pmatrix} -b & b \\ b & -b \end{pmatrix} v_1 \iff v_1 \in \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  ii) $$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (A - \lambda_2 I_2)v_2 = \begin{pmatrix} b & b \\ b & b \end{pmatrix} v_2 \iff v_2 \in \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (Transformationsmatrix)

  Es gilt: $A = S \cdot D \cdot S^{-1}$

  mit $$D = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

② : (**homogene DGL**)

Lösung: $$Y(t) := e^{At} = e^{SDS^{-1}t} \underset{\uparrow}{=} S \cdot e^{Dt} S^{-1}$$

Regel 3: Matrixexponential unter Ähnlichkeitstransformation

Regel 2: Matrixexponential von Diagonalmatrizen

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{(a+b)t} & 0 \\ 0 & e^{(a-b)t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{(a+b)t} + e^{(a-b)t} & e^{(a+b)t} - e^{(a-b)t} \\ e^{(a+b)t} - e^{(a-b)t} & e^{(a+b)t} + e^{(a-b)t} \end{pmatrix}$$

Beachte: $$\varphi(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} A\, ds\right) = \exp\left(S \int_{t_0}^{t} D\, ds\; S^{-1}\right) = S \cdot \exp\left(D \int_{t_0}^{t} I_2\, ds\right) S^{-1}$$

$$= S \cdot e^{D(t-t_0)} S^{-1} = \dots$$

③ : (**Anfangsdaten**): $u(t) = Y(t) \cdot u_0$

Lösung: $$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{(a+b)t} + e^{(a-b)t} & e^{(a+b)t} - e^{(a-b)t} \\ e^{(a+b)t} - e^{(a-b)t} & e^{(a+b)t} + e^{(a-b)t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{(a+b)t} + e^{(a-b)t} \\ e^{(a+b)t} - e^{(a-b)t} \end{pmatrix}$$

④ : (**Probe**):

Lösung: $$u'(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (a+b)e^{(a+b)t} + (a-b)e^{(a-b)t} \\ (a+b)e^{(a+b)t} - (a-b)e^{(a-b)t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{(a+b)t} + e^{(a-b)t} \\ e^{(a+b)t} - e^{(a-b)t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} u(t) \checkmark$$

$$u(0) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

Aufgabe 2:

a) $\boxed{u'(t) = \sqrt{|t|}\cdot \cos^2(u(t)) \quad , \quad u(0) = u^0 \in]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[}$

① : Die Funktion

$$f: \Omega \times D \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(t,v) = \sqrt{|t|}\cdot \cos^2(v)$$

erfüllt $f \in C^{0,1}(\Omega \times D, \mathbb{R})$ für $\Omega = \mathbb{R}$ und $D = \mathbb{R}$. (Merke: $\Omega \overset{\mathbb{R}}{=}]t_A, t_E[=]-\infty, \infty[$ d.h. $t_A = -\infty$, $t_E = +\infty$)

Beweis:

I. f ist stetig auf $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$:

$$f(t,v) = \underbrace{\sqrt{|t|}}_{\substack{\text{stetig}\\ \text{auf } \Omega = \mathbb{R}}} \cdot \underbrace{\cos^2(v)}_{\text{stetig auf } D = \mathbb{R}} \quad \Rightarrow f \text{ stetig auf } \mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

II. $\frac{\partial f}{\partial v}(t,v) = -\sqrt{|t|}\cdot 2\cos(v)\sin(v)$ existiert $\forall (t,v) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$

III. $\frac{\partial f}{\partial v}: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig auf $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(t,v) = -\underbrace{\sqrt{|t|}}_{\text{stetig auf } \mathbb{R}} \cdot \underbrace{2\cos(v)\sin(v)}_{\text{stetig auf } \mathbb{R}} \quad \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v} \text{ stetig auf } \mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

② : Da $f \in C^{0,1}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $t_0 = 0 \in \Omega = \mathbb{R}$, $u^0 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\subset D = \mathbb{R}$ gilt, können wir Satz 1.1 (lokaler Existenz- & Eindeutigkeitssatz, vgl. Aulbach, Satz 2.3.7) auf das (AWP)

$$(\text{AWP1}) \begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(0) = u^0 \end{cases} \Bigg\} \text{ mit } f(t,v) := \sqrt{|t|}\cdot \cos^2(v)$$

anwenden:

$$\overset{\text{Satz 1.1}}{\Rightarrow} \quad \exists \underset{\alpha(t_0,u^0)}{\alpha} > 0 \wedge \exists \bar{u}: [-\alpha, \alpha] \to \mathbb{R} : \bar{u} \text{ löst (AWP1) für } t \in [-\alpha, \alpha].$$

und $\forall -\alpha < T_1 \overset{t_0}{<} 0 < T_2 < \alpha$: $\bar{u}|_{]T_1,T_2[}$ ist die eindeutige Lösung von (AWP1) auf $]T_1, T_2[$.

③ : Wir wollen $\bar{u}$ (mittels Satz 1.2 „globaler Fortsetzungssatz") von $]T_1, T_2[$ auf $]-\infty, \infty[$ fortsetzen: Angenommen die eindeutige Lösung $\bar{u} \in C^1(]T_1, T_2[, \overset{D}{\mathbb{R}})$ ist nicht fortsetzbar, dann gilt

$$\min\left\{ \operatorname{dist}(\bar{u}(t), \partial D), \frac{1}{|\bar{u}(t)|} \right\} \to 0 \quad \text{für} \quad \begin{matrix} t \to t_- := T_1 \overset{!}{>} t_A := -\infty \\ t \to t_+ := T_2 < t_E := +\infty \end{matrix}$$

$$\| \quad D = \mathbb{R} \Rightarrow \partial D = \emptyset \Rightarrow \operatorname{dist}(\bar{u}(t), \partial D) := \infty$$

$$\frac{1}{|\bar{u}(t)|}$$

Wir werden dies widerlegen, und daraus folgen, dass $\bar{u}$ fortsetzbar ist. Nach Annahme gilt $t_+ := T_2 < t_E := +\infty$ und $|\bar{u}(t)| \to \infty$ für $t \to t_+ = T_2$. Definiere $\varphi(t) := |\bar{u}(t)|$ und zeige, dass die Voraussetzungen der Integralversion des Gronwall-Lemmas erfüllt sind: Für $t \in [0, T_2[$ gilt

$$\varphi(t) = |\bar{u}(t) - u^0 + u^0| \leq |u^0| + \left| \int_0^t \bar{u}'(s)\,ds \right|$$

$$\leq |u^0| + \left| \int_0^t f(s, \bar{u}(s)) - f(s,0)\,ds \right| + \left| \int_0^t f(s,0)\,ds \right|$$

$$\leq |u^0| + t \cdot \max_{s\in[0,t]} |f(s,0)| + \int_0^t \underbrace{|f(s,\bar{u}(s)) - f(s,0)|}_{\leq 2\sqrt{|s|}\,|\bar{u}(s)| \leq 2\sqrt{|t|}\cdot|\bar{u}(s)| \leq 2\sqrt{|T_2|}\,|\bar{u}(s)|} ds$$

$$\underset{\text{E2}}{\leq} \underbrace{|u^0| + t \cdot \max_{s\in[0,t]} |f(s,0)|}_{\beta(t),\ \beta\in C([0,T_2[,\mathbb{R})} + \underbrace{2\sqrt{T_2}}_{\alpha>0} \int_0^t \underbrace{|\bar u(s)|}_{=\varphi(s)}\, ds$$

Gronwall-Lemma gilt auch für offene und halboffene Intervalle

Aus der Integralversion des Gronwall-Lemmas folgt für $t\in[0,T_2[$:

$$|\bar u(t)| \leq |u^0| + t\cdot \max_{s\in[0,t]} |f(s,0)| + 2\sqrt{T_2}\cdot \int_0^t e^{2\sqrt{T_2}\cdot(t-s)} \cdot \left(|u^0| + s \max_{\tilde s\in[0,s]} |f(\tilde s,0)|\right) ds$$

$$\underset{T_2<+\infty}{\leq} |u^0| + T_2 \cdot \max_{s\in[0,T_2]} |f(s,0)| + 2\sqrt{T_2}\cdot\left(|u^0| + T_2 \max_{s\in[0,T_2]} |f(s,0)|\right) \cdot \underbrace{\int_0^t e^{2\sqrt{T_2}(t-s)}\, ds}_{=\frac{1}{2\sqrt{T_2}}\cdot\left(e^{2\sqrt{T_2}t}-1\right)}$$

$$\leq \left(|u^0| + T_2 \max_{s\in[0,T_2]} |f(s,0)|\right)\cdot\left(1 + e^{2\sqrt{T_2}t} - 1\right)$$

$$= \left(|u^0| + T_2 \max_{s\in[0,T_2]} |f(s,0)|\right)\cdot e^{2\sqrt{T_2}\,T_2}, \quad t\in[0,T_2[.$$

$$=: M > 0$$

Folglich gilt

$$\frac{1}{|\bar u(t)|} \geq M \quad \forall t\in[0,T_2[$$

$$\Rightarrow \lim_{t\nearrow T_2} \frac{1}{|\bar u(t)|} \geq M > 0 \quad \text{↯ } \bar u \text{ maximal in } T_2$$

Da diese Vorgehensweise für jedes $T_2>0$ funktioniert, gilt $T_2=+\infty$. Der Fall $\underset{T_1}{\underset{\parallel}{t_-}} > \underset{-\infty}{\underset{\parallel}{t_A}}$ geht analog.

E2: Beachte: Für die Funktion

$$f(t,v) = \sqrt{|t|}\, \cos^2(v)$$

gilt

$$\underbrace{\left|\frac{\partial f}{\partial v}(t,v)\right| = \left|-2\sqrt{|t|}\,\sin v \cos v\right| \leq 2\sqrt{|t|}}_{\text{global beschränkt}} \quad \forall t\in[T_1,T_2] \ \forall v\in D=\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow |f(t,v) - f(t,w)| \leq 2\sqrt{|t|}\cdot|v-w| \quad \forall v,w\in D=\mathbb{R},\ t\in[T_1,T_2]$$

global Lipschitz-stetig (im 2. Argument).

Vgl. Abbildung im Skript: $-\infty = t_A = t_-$, $+\infty = t_E = t_+$

S unendlich, D endlich.

④: Lösung auf $\Omega = \mathbb{R}$:

Die Differentialgleichung

$$u'(t) = \sqrt{|t|}\cdot \cos^2(u(t))$$

ist von der Form

$$\boxed{u' = g(t)\cdot h(u),} \quad \text{mit} \quad g: \underset{\mathbb{R}}{\overset{\mathbb{R}}{\Omega}} \to \mathbb{R}\,;\ g(t) = \sqrt{|t|} \ \text{stetig auf } \Omega, \quad h: \underset{\mathbb{R}}{D} \to \mathbb{R}\,,\ h(v) = \cos^2(v) \ \text{stetig auf } D$$

(Gleichung mit getrennten Variablen)

Kochrezept: (Trennung der Variablen / Veränderlichen)

I. Variablen trennen: $\dfrac{du}{dt} = u' = g(t)\cdot h(u)$

$$\overset{\cdot dt,\ :h(u)}{\Longrightarrow} \ \text{"}\ \frac{1}{h(u)}\,du = g(t)\,dt\ \text{"} \quad \boxed{h(u)\neq 0}\,!!$$

II. Integrieren:

Integrationskonstante

- ohne Anfangswert: $H(u) := \displaystyle\int \frac{1}{h(u)}\,du = \int g(t)\,dt = G(t) + C$
- mit Anfangswert $u(t_0) = u^0$: $H(u(t)) = \displaystyle\int_{u^0}^{u(t)} \frac{1}{h(v)}\,dv = \int_{t_0}^{t} g(\tau)\,d\tau = G(t)$

III. Nach $u(t)$ auflösen

Damit erhalten wir:

$$\int_{u^0}^{u(t)} \frac{1}{h(v)}\,dv = \int_{u^0}^{u(t)} \frac{1}{\cos^2(v)}\,dv = \left[\tan(v)\right]_{u^0}^{u(t)} = \tan(u(t)) - \tan(u^0)$$

$$\| $$

$$\int_{t_0}^{t} g(\tau)\,d\tau = \int_{t_0=0}^{t} \sqrt{|\tau|}\,d\tau \underset{t_0=0}{\overset{\uparrow}{=}} \begin{cases} \displaystyle\int_0^t \sqrt{\tau}\,d\tau = \left[\tfrac{2}{3}\tau^{\frac{3}{2}}\right]_0^t = \tfrac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} = \tfrac{2}{3}|t|^{\frac{3}{2}}, & t\geq 0 \\ \displaystyle\int_0^t \sqrt{-\tau}\,d\tau = -\int_t^0 \sqrt{-\tau}\,d\tau = \left[\tfrac{2}{3}(-\tau)^{\frac{3}{2}}\right]_t^0 \\ \quad = -\tfrac{2}{3}(-t)^{\frac{3}{2}} = -\tfrac{2}{3}|t|^{\frac{3}{2}}, & t\leq 0 \end{cases}$$

$$= \frac{2}{3}|t|^{\frac{3}{2}}\cdot \operatorname{sgn}(t).$$

$$\Rightarrow \tan(u(t)) = \tan(u^0) + \frac{2}{3}|t|^{\frac{3}{2}}\cdot \operatorname{sgn}(t)$$

$$\Rightarrow u(t) = \arctan\Big(\tan(u^0) + \frac{2}{3}|t|^{\frac{3}{2}}\cdot \operatorname{sgn}(t)\Big) \in \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[\quad \forall t\in\mathbb{R}$$

zeitliche

Für $u_0 \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, ist das maximale Existenzintervall $\Omega = \mathbb{R}$.

(sogar für $u_0 \in \left](k-1)\pi + \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right[,\ k\in\mathbb{Z}$)

d.h. $u_0 \notin \mathbb{Z}\pi + \frac{\pi}{2}$

⑤: Probe:

$$u'(t) = \frac{d}{dt}\arctan\Big(\tan(u^0) + \frac{2}{3}|t|^{\frac{3}{2}}\operatorname{sgn}(t)\Big)$$

$$= \cos^2\Big(\underbrace{\arctan\big(\tan(u^0) + \tfrac{2}{3}|t|^{\frac{3}{2}}\operatorname{sgn}(t)\big)}_{=u(t)}\Big)\cdot \frac{d}{dt}\Big(\tan(u^0) + \frac{2}{3}|t|^{\frac{3}{2}}\operatorname{sgn}(t)\Big)$$

$$= \cos^2(u(t))\cdot \frac{d}{dt}\underbrace{\frac{2}{3}|t|^{\frac{3}{2}}\operatorname{sgn}(t)}_{= \begin{cases} \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}, & t\geq 0 \\ -\frac{2}{3}(-t)^{\frac{3}{2}}, & t<0 \end{cases}} = \cos^2(u(t))\cdot |t|^{\frac{1}{2}} = \cos^2(u(t))\cdot\sqrt{|t|}.$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{2}{3}|t|^{\frac{3}{2}}\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} t^{\frac{1}{2}}, & t\geq 0 \\ (-t)^{\frac{1}{2}}, & t<0 \end{cases} = |t|^{\frac{1}{2}}$$

b) $\boxed{u'(t) = \sqrt{|u(t)|} \cdot \sin^2(t) \quad , \quad u(0) = u^0 > 0}$

(1) Die Funktion

$$f : \Omega \times D \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(t,v) = \sqrt{|v|} \cdot \sin^2(t)$$

erfüllt $f \in C^{0,1}(\Omega \times D, \mathbb{R})$ für $\Omega = \mathbb{R}$, $D = \mathbb{R}^*_- = \{v \in \mathbb{R} \mid v < 0\}$
und $\Omega = \mathbb{R}$, $D = \mathbb{R}^*_+ = \{v \in \mathbb{R} \mid v > 0\}$.

Beweis:

I. f ist stetig auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$f(t,v) = \underbrace{\sqrt{|v|}}_{\text{stetig auf } \mathbb{R}} \cdot \underbrace{\sin^2(t)}_{\text{stetig auf } \mathbb{R}} \quad \Rightarrow \text{stetig auf } \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

II. $$\frac{\partial f}{\partial v}(t,v) = \begin{cases} \frac{1}{2} v^{-\frac{1}{2}} \cdot \sin^2(t) = \frac{1}{2} |v|^{-\frac{1}{2}} \sin^2(t) \quad , t > 0 \\ -\frac{1}{2}(-v)^{-\frac{1}{2}} \cdot \sin^2(t) = -\frac{1}{2} |v|^{-\frac{1}{2}} \sin^2(t) \quad , t < 0 \end{cases} = \operatorname{sgn}(v) \cdot \frac{1}{2} |v|^{-\frac{1}{2}} \sin^2(t)$$

existiert für alle $(t,v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, $\mathbb{R}^* = \{v \in \mathbb{R} \mid v \neq 0\}$

III. $\frac{\partial f}{\partial v} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ ist stetig auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*_+$ und auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*_-$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(t,v) = \underbrace{\operatorname{sgn}(v) \cdot \frac{1}{2} \cdot |v|^{-\frac{1}{2}}}_{\text{stetig auf } \mathbb{R}^*_+ \text{ und auf } \mathbb{R}^*_-} \cdot \underbrace{\sin^2(t)}_{\text{stetig auf } \mathbb{R}}$$

(2): Da $f \in C^{0,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*_+, \mathbb{R})$, $t_0 = 0 \in \Omega = \mathbb{R}$, $0 < u^0 \in D = \mathbb{R}^+_*$ gilt, können wir Satz 1.1 auf das (AWP)

$$(\text{AWP2}) \quad \left\{ \begin{array}{l} u'(t) = f(t,u(t)) \\ u(0) = u^0 \end{array} \right\} \quad \text{mit } f(t,v) = \sqrt{|v|} \cdot \sin^2(t)$$

anwenden.

$\Rightarrow \exists \alpha > 0 \wedge \exists \bar{u} : [-\alpha, \alpha] \to \mathbb{R} : \bar{u}$ löst (AWP2) für $t \in [-\alpha, \alpha]$

und

$\forall -\alpha < T_1 < 0 < T_2 < \alpha : \bar{u}|_{]T_1,T_2[}$ ist die eindeutige Lösung von (AWP2) auf $]T_1, T_2[$.

(3): Der globale Fortsetzungssatz ist nicht anwendbar, da die Funktion
$f(t,v) := \sqrt{|v|} \sin^2(t)$
nicht global Lipschitz-stetig (im 2. Argument) ist, anders $\frac{\partial f}{\partial v}$ ist für festes t nicht global (d.h. auf $D = \mathbb{R}$) beschränkt.

④ : Die Differentialgleichung

$$u'(t) = \sqrt{|u(t)|} \cdot \sin^2(t)$$

ist von der Form

$$\boxed{u' = g(t) \cdot h(u)} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} g : \underset{\mathbb{R}}{\overset{\shortparallel}{\Omega}} \to \mathbb{R}, \ g(t) = \sin^2(t) \text{ stetig auf } \Omega \\ h : \underset{\mathbb{R}}{\overset{\shortparallel}{D}} \to \mathbb{R}, \ h(v) = \sqrt{|v|} \text{ stetig auf } D \end{array}$$

(Gleichung mit getrennten Variablen)

Trennung der Veränderlichen liefert:

$$\int_{u^0}^{u(t)} \frac{1}{h(v)}\, dv = \int_{u^0>0}^{u(t)} |v|^{-\frac{1}{2}} dv \underset{\substack{\uparrow \\ u^0>0 \\ \boxed{u(t)>0}\,!}}{=} \int_{u^0}^{u(t)} v^{-\frac{1}{2}} dv = \left[2 v^{\frac{1}{2}}\right]_{u}^{u(t)} = 2\sqrt{u(t)} - 2\sqrt{u^0}$$

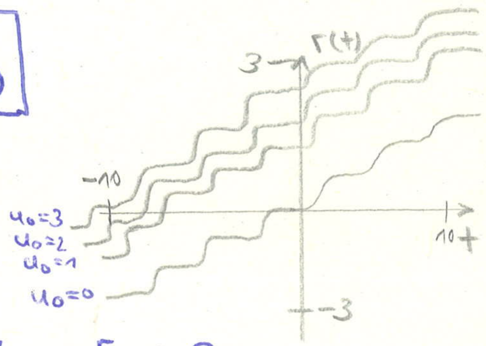
$$\shortparallel$$

$$\int_{t_0}^{t} g(\tau)\, d\tau = \int_{t_0=0}^{t} \sin^2(\tau)\, d\tau = \left[\frac{1}{2}\tau - \frac{1}{2}\sin(\tau)\cos(\tau)\right]_0^t = \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\sin(t)\cos(t)$$

$$\Rightarrow \sqrt{u(t)} = \sqrt{u^0} + \frac{1}{4}t - \frac{1}{4}\sin(t)\cos(t) \quad \boxed{\overset{!}{\geq} 0}$$

$$\Rightarrow u(t) = \left(\sqrt{u^0} + \frac{1}{4}t - \frac{1}{4}\sin(t)\cos(t)\right)^2$$

⑤ Probe > siehe nächste Seite



⑥ **Fortsetzung:**

(i) Betrachte die Funktion

$$t \to \sqrt{u_0} + \frac{1}{4}t - \frac{1}{4}\sin(t)\cos(t), \quad \Gamma :]-\infty, \infty[\to \mathbb{R}.$$

Diese erfüllt die Eigenschaften:

- positiv bei $t=0$:

  $\Gamma(0) = \sqrt{u_0} > 0$, da $u_0 > 0$,

- streng monoton wachsend (in $]-\infty,\infty[$):

Monotonie differenzierbarer reeller Funktionen

1) $\Gamma'(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos^2(t) + \frac{1}{4}\underbrace{\sin^2(t)}_{=1-\cos^2(t)} = \frac{1}{2}(1-\cos^2(t)) = \frac{1}{2}\sin^2(t) \geq 0$

2) $\exists$ diskrete Teilmenge $M := \pi\mathbb{Z} \subset]-\infty,\infty[: \ \Gamma'(t) = 0 \Leftrightarrow t \in M$

- negativ für $t \to -\infty$:

  $\lim_{t\to-\infty} \Gamma(t) = -\infty$

Daher gilt

$$\exists_1 \bar{t}_1 = \bar{t}_1(u_0) < 0 : \Gamma(\bar{t}_1) = 0$$

und

$$u :]\bar{t}_1, \infty[\to \mathbb{R}, \quad u(t) = \left(\sqrt{u_0} + \frac{1}{4}t - \frac{1}{4}\sin(t)\cos(t)\right)^2$$

ist Lösung des AWP's. Aber u ist nicht maximal: Eine mögliche Fortsetzung wäre

$$\bar{u}_1 :]-\infty,\infty[\to \mathbb{R} \quad \bar{u}_1(t) = \begin{cases} u(t), & t \in]\bar{t}_1, \infty[\\ 0, & t \in]-\infty, \bar{t}_1] \end{cases}.$$

(Beachte: $\bar{u}$ ist stetig diff'bar bei $\bar{t}_1$ mit $\bar{u}'(\bar{t}_1) = 0$) Diese Fortsetzung ist aber nicht eindeutig, denn es gibt weitere:

(ii) Betrachte dazu das AWP

$$u'(t) = \sqrt{|u(t)|}\,\sin^2(t)$$

zu der Anfangsbedingung $\boxed{u(\bar{t}_1)=0}$ (in Rückwärtszeit, d.h. $t\le \bar{t}_1$):

$$\int_{u^0}^{u(t)} \frac{1}{h(v)}\,dv \underset{u^0=0}{\overset{\uparrow}{=}} \int_0^{u(t)} |v|^{-\frac{1}{2}}\,dv \underset{u(t)<0}{\overset{\uparrow}{=}} -\int_{u(t)}^{0} (-v)^{-\frac{1}{2}}\,dv = -\Big[-2\sqrt{-v}\Big]_{u(t)}^{0} = -2\sqrt{-u(t)}$$

$$\|$$

$$\int_{t_0}^{t} g(\tau)\,d\tau \underset{t_0=\bar{t}_1}{\overset{\uparrow}{=}} \int_{\bar{t}_1}^{t} \sin^2(\tau)\,d\tau \underset{t\le \bar{t}_1}{\overset{\uparrow}{=}} -\int_{t}^{\bar{t}_1} \sin^2(\tau)\,d\tau = -\Big[\frac{1}{2}\tau - \frac{1}{2}\sin(\tau)\cos(\tau)\Big]_{t}^{\bar{t}_1}$$

$$= -\frac{1}{2}(\bar{t}_1 - t) + \frac{1}{2}\big(\sin(\bar{t}_1)\cos(\bar{t}_1) - \sin(t)\cos(t)\big)$$

$$\Rightarrow \sqrt{-u(t)} = \frac{1}{4}(\bar{t}_1 - t) - \frac{1}{4}\big(\sin(\bar{t}_1)\cos(\bar{t}_1) - \sin(t)\cos(t)\big) \ge 0$$

$$\Rightarrow \hat{u}_{\bar{t}_1}(t) := u(t) = -\Big(\frac{1}{4}(\bar{t}_1 - t) - \frac{1}{4}\big(\sin(\bar{t}_1)\cos(\bar{t}_1) - \sin(t)\cos(t)\big)\Big)^2$$

Damit erhalten wir eine weitere Fortsetzung

$$\bar{u}_2 : \,]-\infty,\infty[\, \to \mathbb{R} \quad \bar{u}_2(t) = \begin{cases} u(t) &, t\in\,]\bar{t}_1,\infty[\\ \hat{u}_{\bar{t}_1}(t) &, t\in\,]-\infty,\bar{t}_1] \end{cases}.$$

(iii) Betrachten wir für beliebiges $\bar{t}_2 < \bar{t}_1$ das AWP aus (ii) mit der Anfangsbedingung $\boxed{u(\bar{t}_2)=0}$, so ist die Lösung durch $\hat{u}_{\bar{t}_2}$ gegeben. Wir erhalten somit unendlich viele max. Fortsetzungen von u durch

$$\bar{u}_{gen} : \,]-\infty,\infty[\, \to \mathbb{R} \quad \bar{u}_{gen}(t) = \begin{cases} u(t) &, t\in\,]\bar{t}_1,\infty[\\ 0 &, t\in\,]\bar{t}_2,\bar{t}_1] \\ u_{\bar{t}_2}(t) &, t\in\,]-\infty,\bar{t}_2] \end{cases}.$$

5: Probe:

$$u'(t) = \frac{d}{dt}\Big(\sqrt{u^0} + \frac{1}{4}t - \frac{1}{4}\sin(t)\cos(t)\Big)^2$$

$$= 2\Big(\sqrt{u^0} + \frac{1}{4}t - \frac{1}{4}\sin(t)\cos(t)\Big)\cdot \underbrace{\Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos^2(t) + \frac{1}{4}\underbrace{\sin^2(t)}_{=1-\cos^2(t)}\Big)}_{=\frac{1}{2}(1-\cos^2(t)) = \frac{1}{2}\sin^2(t)}$$

$$= \underbrace{\Big(\sqrt{u^0} + \frac{1}{4}t - \frac{1}{4}\sin(t)\cos(t)\Big)}_{\ge 0}\cdot \sin^2(t)$$

$$= \Big|\sqrt{u^0} + \frac{1}{4}t - \frac{1}{4}\sin(t)\cos(t)\Big|\cdot \sin^2(t)$$

$$= \sqrt{\Big|\sqrt{u^0} + \frac{1}{4}t - \frac{1}{4}\sin(t)\cos(t)\Big|^2}\cdot \sin^2(t)$$

$$= \sqrt{\Big|\underbrace{\Big(\sqrt{u^0} + \frac{1}{4}t - \frac{1}{4}\sin(t)\cos(t)\Big)^2}_{=u(t)}\Big|}\cdot \sin^2(t)$$

$$= \sqrt{|u(t)|}\cdot \sin^2(t).$$

Aufgabe 3:

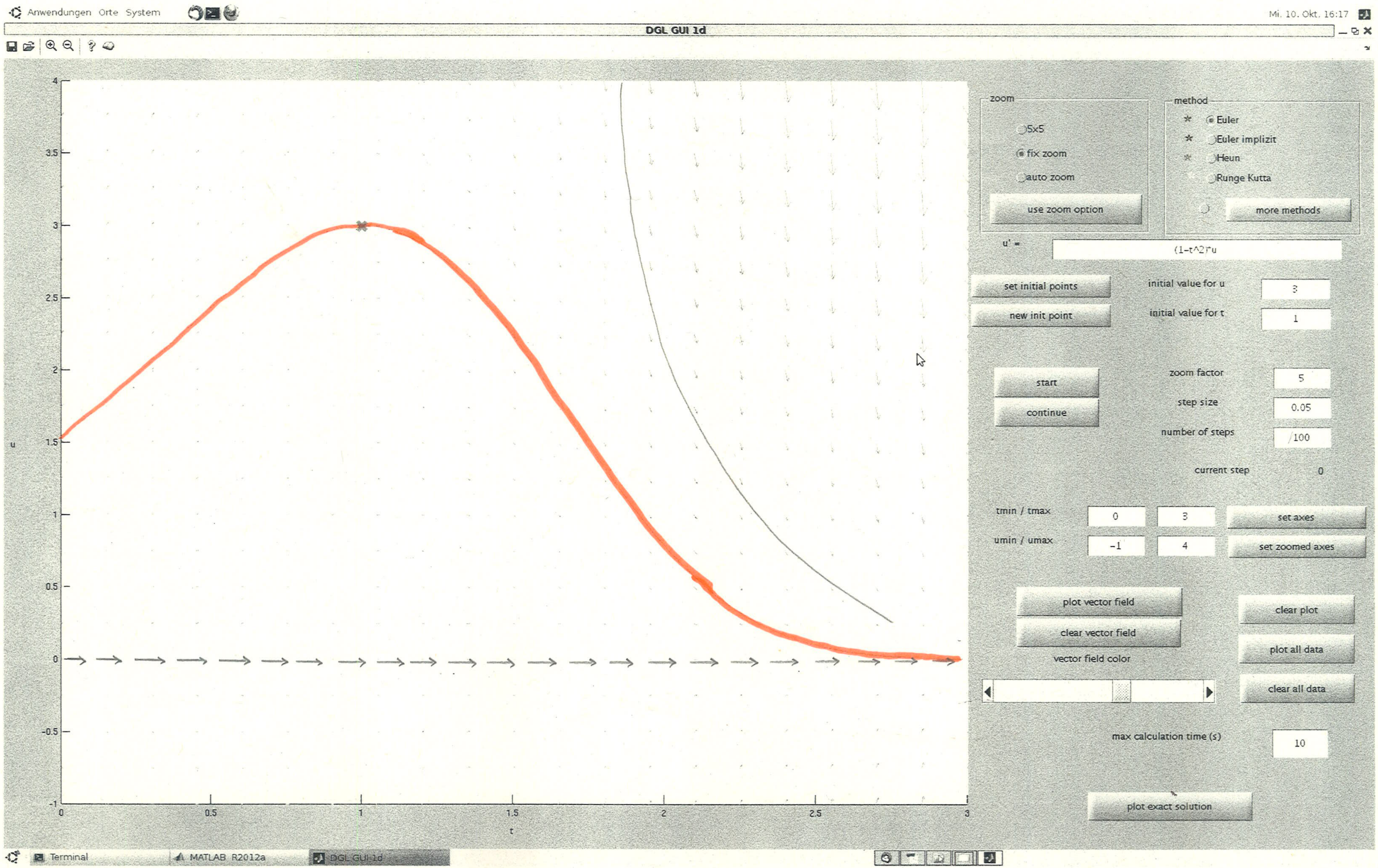
Sei $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$:

b) $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} u_1 u_2 \\ u_2 - u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$ „$\rightarrow$" $\iff$ $u_1 = u_2$, $u_1^2 = u_2^2 = \lambda > 0$

$= \begin{pmatrix} -\lambda \\ 0 \end{pmatrix}$ „$\leftarrow$" $\iff$ $u_1 = u_2$, $u_1^2 = u_2^2 = -\lambda < 0$ $\emptyset$

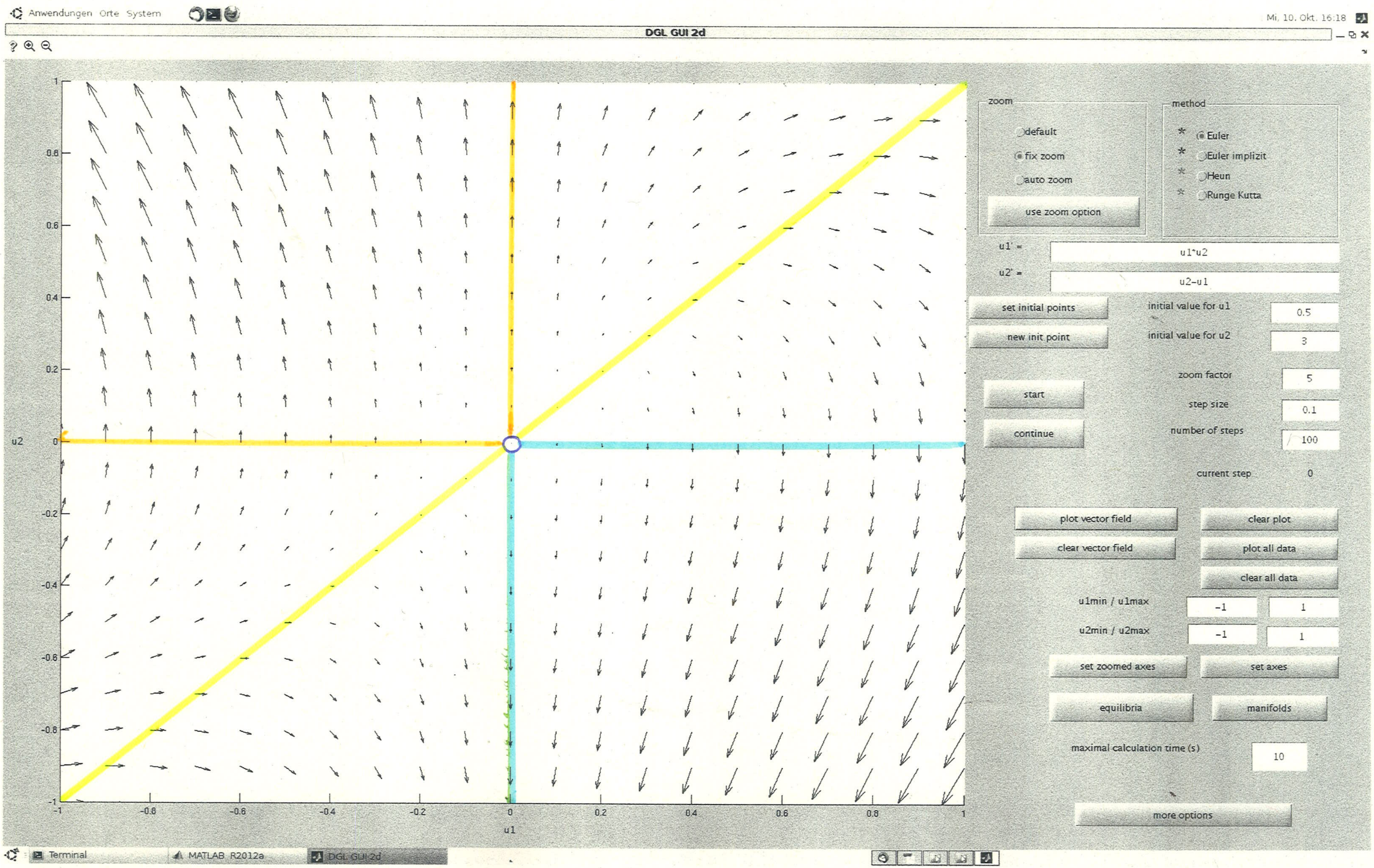
$= \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \end{pmatrix}$ „$\uparrow$" $\iff$ $u_1 = 0$ und $u_2 = \lambda > 0$ oder $u_2 = 0$ und $u_1 = -\lambda < 0$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ -\lambda \end{pmatrix}$ „$\downarrow$" $\iff$ $u_1 = 0$ und $u_2 = -\lambda < 0$ oder $u_2 = 0$ und $u_1 = \lambda > 0$


Anwendungen Orte System
Mi. 10. Okt. 16:17
DGL GUI 1d
zoom
5x5
fix zoom
auto zoom
use zoom option
method
Euler
Euler implizit
Heun
Runge Kutta
more methods
u' =
(1-t^2)*u
set initial points
new init point
initial value for u
3
initial value for t
1
start
continue
zoom factor
5
step size
0.05
number of steps
100
current step
0
tmin / tmax
0
3
umin / umax
-1
4
set axes
set zoomed axes
plot vector field
clear vector field
vector field color
clear plot
plot all data
clear all data
max calculation time (s)
10
plot exact solution
u
t
Terminal
MATLAB R2012a
DGL GUI 1d

3a)

3b)



Anwendungen Orte System
Mi, 10. Okt. 16:18
DGL GUI 2d
zoom
default
fix zoom
auto zoom
use zoom option
method
Euler
Euler implizit
Heun
Runge Kutta
u1' =
u1*u2
u2' =
u2-u1
set initial points
new init point
initial value for u1
0.5
initial value for u2
3
zoom factor
5
start
step size
0.1
continue
number of steps
100
current step
0
plot vector field
clear plot
clear vector field
plot all data
clear all data
u1min / u1max
-1
1
u2min / u2max
-1
1
set zoomed axes
set axes
equilibria
manifolds
maximal calculation time (s)
10
more options
u1
u2
Terminal
MATLAB R2012a
DGL GUI 2d