Aufgaben zur Vorlesung
Numerik II
Wintersemester 2012/13
Übungsblatt 2

W.–J. Beyn
D. Otten

Abgabe: Mittwoch, 24.10.2012, vor Beginn der Übung

Übung: Mi. 12:15–13:45, V5-148

Aufgabe 4: [Erhaltungsgröße]

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} u_1' &= u_2, \\ u_2' &= -\frac{1}{M}F(u_1), \end{aligned}$$

wobei $M > 0$, $F(u) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}V(u)$ und $V(u) = \frac{1}{3}u^3 - u$.

a) Skizzieren Sie (z. B. mit Hilfe einer geeigneten NUMLAB GUI) das Richtungsfeld dieser Differentialgleichung für $M = 1$ und $u_1, u_2 \in [-2, 2]$.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad E(u_1, u_2) = \frac{1}{2}Mu_2^2 + V(u_1)$$

eine Erhaltungsgröße für diese Differentialgleichung ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 5: [Stetige Abhängigkeit vom Anfangswert]

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : \mathbb{R} \times D \to \mathbb{R}^n$ stetig. Weiter genüge f einer einseitigen Lipschitz-Bedingung, d. h. es gebe ein $\alpha \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$\langle f(t, v_1) - f(t, v_2), v_1 - v_2 \rangle \leq \alpha \left\| v_1 - v_2 \right\|_2^2$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, $v_1, v_2 \in D$. Dabei bezeichne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das euklidische Skalarprodukt und $\| \cdot \|_2$ die euklidische Norm. Seien u und v Lösungen der Anfangswertprobleme $u'(t) = f(t, u(t))$, $u(t_0) = u^0$ sowie $v'(t) = f(t, v(t))$, $v(t_0) = v^0$ mit demselben Existenzintervall $J = [t_0, t_1)$. Zeigen Sie mit Hilfe des differentiellen Gronwall-Lemmas die Abschätzung

$$\left\| u(t) - v(t) \right\|_2^2 \leq \left\| u^0 - v^0 \right\|_2^2 e^{2\alpha(t - t_0)}$$

für alle $t \in J$.

(6 Punkte)

Aufgabe 6: [Taylormethode]

a) Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^n)$ und $u : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung der Anfangswertaufgabe

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad u(t_0) = u_0,$$

für $t \in [t_0, t_1]$. Zeigen Sie, dass für die Ableitungen der Lösung gilt

$$u^{(k)}(t) = f_k(t, u(t)), \quad k = 0, 1, 2, \dots ,$$

wenn die Funktionen f_k geeignet rekursiv definiert werden (wie?).

b) Die Taylormethode besteht darin, den Wert $u(t_0 + h)$, h eine Schrittweite, durch

$$p_m(t_0 + h) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} u^{(k)}(t_0) h^k = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} f_k(t_0, u_0) h^k$$

zu approximieren, wobei f_k wie in a) definiert wird.

Führen Sie dies im Fall

$$u' = 1 + tu^2, \quad u(0) = 0$$

mit $m = 5$ explizit durch, um $u(h)$ zu approximieren.

(6 Punkte)

Numerik II (WS 12/13)
Übungsblatt 02
Lösungen

Aufgabe 4:

Betrachte die DGL

$$(4.1)\qquad \boxed{\begin{aligned} u_1' &= u_2 \\ u_2' &= -\frac{1}{M}F(u_1)\end{aligned}}$$

wobei
$$M>0\,,\quad F(u)=\frac{d}{du}V(u)\,,\quad V(u)=\frac{1}{3}u^3-u.$$

a): siehe nächste Seite.

b): Die Funktion
$$E:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\,,\quad E(u_1,u_2)=\frac{1}{2}Mu_2^2+V(u_1)$$
ist eine Erhaltungsgröße für (4.1).

Lösung:

(1): Wir müssen zeigen, dass sich der Wert von E in der Zeit nicht verändert, d.h. $\frac{d}{dt}E(u_1(t),u_2(t))=0\ \forall t\in\mathbb{R}$:

$$\frac{d}{dt}E(u_1(t),u_2(t)) \overset{\text{Def } E}{=} \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}Mu_2^2(t)+V(u_1(t))\right]$$
$$\overset{\substack{\text{Produktregel}\\ \text{\& Kettenregel}}}{=} M\cdot u_2(t)\cdot u_2'(t)+\frac{d}{du}V(u_1(t))\cdot\frac{d}{dt}u_1(t)$$
$$\overset{\substack{\text{Def } F\\ \& (4.1)}}{=} M\cdot u_2(t)\cdot\left(-\frac{1}{M}\right)\cdot F(u_1(t))+F(u_1(t))\,u_2(t)=0\quad\forall t\in\mathbb{R}.$$

D.h.
$$E(u_1(t),u_2(t))=\text{const.}\quad\forall t\in\mathbb{R}.\quad (\text{d.h. } E(u_1(t),u_2(t))=E(u_1(s),u_2(s))\ \forall t,s\in\mathbb{R})$$

(2): Um die Konstante eindeutig festlegen zu können, benötigen wir z.B. Anfangsbedingungen: $u_1(t_0)=u_1^0$, $u_2(t_0)=u_2^0$. Dann folgt

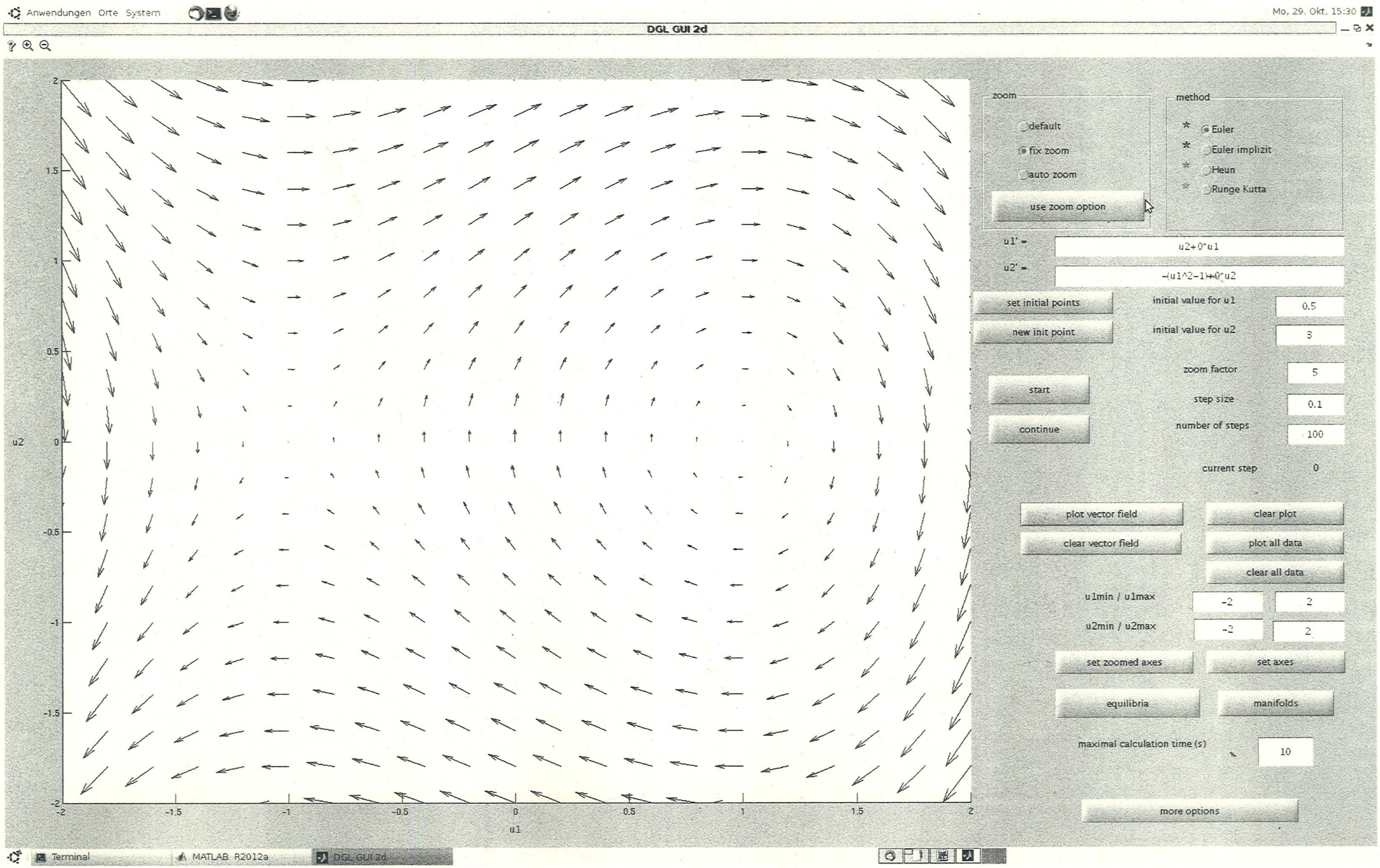
$$\begin{aligned} E(u_1(t),u_2(t)) &= E(u_1(t_0),u_2(t_0)) \\ &= E(u_1^0,u_2^0) \\ &= \frac{1}{2}M(u_2^0)^2+\underbrace{V(u_1^0)}_{=\frac{1}{3}(u_1^0)^3-u_1^0}. \\ &= \text{const.}\end{aligned}$$

„Alternativlösung": $\boxed{\frac{d}{dt}E(u(t))=\nabla^T E(u(t))\cdot u'(t)=0}$

$$\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}u_2\\-\frac{1}{M}F(u_1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_2\\-\frac{1}{M}(u_1^2-1)\end{pmatrix}=:f(u_1,u_2)$$

$$\nabla E(u_1,u_2)=\begin{pmatrix}Mu_2\\u_1^2-1\end{pmatrix}$$

$$\nabla^T E(u)\cdot u'=\nabla^T E(u_1,u_2)\,f(u_1,u_2)=\begin{pmatrix}u_1^2-1\\Mu_2\end{pmatrix}^T\cdot\begin{pmatrix}u_2\\-\frac{1}{M}(u_1^2-1)\end{pmatrix}=0$$



Anwendungen Orte System
Mo, 29. Okt, 15:30
DGL GUI 2d
zoom
default
fix zoom
auto zoom
use zoom option
method
Euler
Euler implizit
Heun
Runge Kutta
u1' =
u2+0*u1
u2' =
-(u1^2-1)+0*u2
set initial points
new init point
initial value for u1
0.5
initial value for u2
3
zoom factor
5
step size
0.1
number of steps
100
start
continue
current step
0
plot vector field
clear vector field
clear plot
plot all data
clear all data
u1min / u1max
-2
2
u2min / u2max
-2
2
set zoomed axes
set axes
equilibria
manifolds
maximal calculation time (s)
10
more options
u1
u2
Terminal
MATLAB R2012a
DGL GUI 2d

Aufgabe 5:

$D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathbb{R} \times D \to \mathbb{R}^n$ stetig mit

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} : \langle f(t,v_1) - f(t,v_2), v_1 - v_2 \rangle \leq \alpha \cdot \|v_1 - v_2\|_2^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}\ \forall v_1, v_2 \in D$$

u, v Lösungen von

$$(5.1) \quad u'(t) = f(t, u(t)), \quad u(t_0) = u^0, \qquad t \in J = [t_0, t_1[.$$
$$(5.2) \quad v'(t) = f(t, v(t)), \quad v(t_0) = v^0,$$

Behauptung:

$$\|u(t) - v(t)\|_2^2 \leq \|u^0 - v^0\|_2^2 \, e^{2\alpha(t-t_0)} \quad \forall t \in J.$$

Beweis:

Wir wollen das differentielle Gronwall-Lemma mit

$$\varphi(t) = \|u(t) - v(t)\|_2^2, \quad \alpha = 2\alpha, \quad \beta = 0, \quad J = [t_0, t_1[$$

anwenden: (wichtig ist das Quadrat, da φ sonst nicht differenzierbar ist)

Subtrahiere (5.1) & (5.2) voneinander und multipliziere von links mit $(u(t) - v(t))^T$:

$$\frac{d}{dt}\varphi(t) = \frac{d}{dt}\|u(t) - v(t)\|_2^2$$
$$= \frac{d}{dt}\langle u(t) - v(t), u(t) - v(t)\rangle$$
$$\overset{(5.3)}{=} \langle u(t) - v(t), u'(t) - v'(t)\rangle + \langle u'(t) - v'(t), u(t) - v(t)\rangle$$
$$= 2\langle u'(t) - v'(t), u(t) - v(t)\rangle$$
$$= 2\langle f(t, u(t)) - f(t, v(t)), u(t) - v(t)\rangle$$
$$\leq 2\alpha \|u(t) - v(t)\|_2^2 \qquad \forall t \in [t_0, t_1[$$
$$= 2\alpha\, \varphi(t)$$

$$\overset{\text{Diff. Gronwall-Lemma}}{\Longrightarrow} \varphi(t) = \|u(t) - v(t)\|^2 \leq e^{2\alpha(t-t_0)}\varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{2\alpha(t-s)} \cdot 0 \, ds$$
$$= e^{2\alpha(t-t_0)} \|u^0 - v^0\|_2^2. \qquad \forall t \in [t_0, t_1[= J.$$

$$(5.3) \quad \frac{d}{dt}\langle u(t) - v(t), u(t) - v(t)\rangle = \frac{d}{dt}(u(t) - v(t))^T(u(t) - v(t))$$
$$\overset{\text{Produktregel}}{=} \left[\frac{d}{dt}(u(t) - v(t))\right]^T (u(t) - v(t)) + (u(t) - v(t))^T \cdot \left[\frac{d}{dt}(u(t) - v(t))\right]$$
$$= (u'(t) - v'(t))^T(u(t) - v(t)) + (u(t) - v(t))^T(u'(t) - v'(t))$$
$$= \langle u'(t) - v'(t), u(t) - v(t)\rangle + \langle u(t) - v(t), u'(t) - v'(t)\rangle$$

Aufgabe 6:

a) $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^n)$, $u : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ Lösung von

$$(6.1) \quad \boxed{\begin{aligned} u'(t) &= f(t, u(t)) \quad , \; t \in [t_0, t_1] \\ u(t_0) &= u^0 \end{aligned}}$$

Zeigen Sie:

$$u^{(k)}(t) = f_k(t, u(t)) \quad , \; k = 0, 1, 2, \ldots,$$

wobei f_k geeignet rekursiv definiert werden.

Lösung: Definiere für $k \in \mathbb{N}_0$

$$f_k : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n \quad , \quad f_k(t, v) := \begin{cases} v & , k = 0 \\ [D_t f_{k-1}](t, v) + [D_v f_{k-1}](t, v) \cdot f(t, v), & k \geq 1 \end{cases}$$

Wir zeigen (durch Induktion über $k \in \mathbb{N}_0$)

(IV) $\quad u^{(k)}(t) = f_k(t, u(t)) \quad , k \in \mathbb{N}_0 \,, \; t \in [t_0, t_1]$,

gilt.

(1) : $k = 0$: $u^{(0)}(t) = u(t) \overset{\text{Def } f_0}{=} f_0(t, u(t))$. ✓

(2) : (IA) : $(k = 1)$

$$u^{(1)}(t) = u'(t) \overset{(6.1)}{=} f(t, u(t)) \overset{\text{Def } f_1}{=} f_1(t, u(t)). \; ✓$$

(3) : (IS) : $(k \to k+1)$

$$u^{(k+1)}(t) = \frac{d}{dt}\left[u^{(k)}(t)\right] \overset{(IV)}{=} \frac{d}{dt}\left[f_k(t, u(t))\right]$$

$$= [D_t f_k](t, u(t)) + [D_v f_k](t, u(t)) \cdot \underbrace{\left(\frac{d}{dt} u(t)\right)}_{\overset{(6.1)}{=} f(t, u(t))}$$

$$\overset{\text{Def } f_{k+1}}{=} f_{k+1}(t, u(t)). \; ✓$$

b) Taylormethode: Für $h > 0$ Schrittweite approximiere $u(t_0 + h)$ durch

$$\boxed{u(t_0 + h) \approx p_m(t_0 + h) := \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} u^{(k)}(t_0) \cdot h^k = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \cdot f_k(t_0, u_0) \cdot h^k}$$

wobei f_k wie in a) definiert werden. Betrachte

$$\boxed{\begin{aligned} u'(t) &= 1 + t u^2(t) \quad , \; t \in [0, T] \\ u(0) &= 0 \end{aligned}} \qquad f(t, v) = 1 + t v^2$$

und bestimme $p_5(h)$ für beliebiges $h > 0$.

Lösung:

$$u(t) = \frac{\sqrt{3}\,Ai(-t) - Bi(-t)}{-\sqrt{3}\,Ai'(-t) + Bi'(-t)}$$

$\rightsquigarrow$ Ai, Bi Airy functions
Lösungen von $w''(t) = t \cdot w(t)$

Lösung: Zunächst bestimmen wir $f_0(t, v), \ldots, f_5(t, v)$:

$$\begin{aligned}
f_0(t, v) &= v \\
f_1(t, v) &= f(t, v) = 1 + t v^2 \\
f_2(t, v) &= v^2 + 2tv(1 + tv^2) = 2tv + v^2 + 2t^2 v^3 \\
f_3(t, v) &= (2v + 4tv^3) + (2t + 2v + 6t^2 v)(1 + tv^2) \\
&= 4v + 2t + 6tv^3 + 8t^2 v^2 + 6t^3 v^4 \\
f_4(t, v) &= 6 + 6v^3 + 38tv^2 + 16t^2 v + 36t^2 v^4 + 40t^3 v^3 + 24t^4 v^5 \\
f_5(t, v) &= 56v^2 + 90tv^4 + 108tv + 340t^2 v^3 + 240t^3 v^5 + 16t^2 + 136t^3 v^2 + 240t^4 v^4 \\
&\quad + 120t^5 v^6.
\end{aligned}$$

Nun erhalten wir:

$$u(h) \approx p_5(h) = \frac{1}{1!} \underbrace{f_1(0,0)}_{=1} h^1 + \frac{1}{4!} \cdot \underbrace{f_4(0,0)}_{=6} \cdot h^4 = h + \frac{1}{4} h^4,$$

denn

$$f_0(0,0) = 0,$$
$$f_1(0,0) = 1,$$
$$f_2(0,0) = 0,$$
$$f_3(0,0) = 0,$$
$$f_4(0,0) = 6,$$
$$f_5(0,0) = 0.$$