Aufgaben zur Vorlesung
Numerik II
Wintersemester 2012/13
Übungsblatt 3

W.–J. Beyn
D. Otten

Abgabe: Mittwoch, 31.10.2012, vor Beginn der Übung

Übung: Mi. 12:15–13:45, V5-148

Aufgabe 7: [chemische Modellierung und Erhaltungsgrößen]

Stellen Sie für das folgende chemische Reaktionsschema (die inhibierte Michaelis–Menten Reaktion)

$$C + E \xrightarrow{k_1} CE \xrightarrow{k_2} D + E,\ C + CE \underset{k_{-3}}{\overset{k_3}{\rightleftharpoons}} CCE$$

das zugehörige Differentialgleichungssystem für die Konzentrationen $c[C]$, $e[E]$, $\kappa[CE]$, $\sigma[CCE]$ und $d[D]$ auf.
Finden Sie eine Erhaltungsgröße für die Anfangswertaufgabe mit den Anfangswerten c_0, e_0, κ_0, σ_0, d_0 und reduzieren Sie mit ihrer Hilfe auf eine dreidimensionale Anfangswertaufgabe für c, e und κ. Bestimmen Sie die stationären Punkte dieses dreidimensionalen Systems unter der Annahme $e_0 + \kappa_0 + \sigma_0 > 0$, wobei stets k_1, k_2, k_3, $k_{-3} > 0$ gefordert wird.

(6 Punkte)

Aufgabe 8: [Euler-Verfahren und komplexe, lineare AWA]

Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und $\bar{u}(t),\ t \geq 0$ die **komplexwertige** Lösung der Anfangswertaufgabe

$$u' = \lambda u,\ u(0) = u^0 \in \mathbb{C}.$$

a) Zeigen Sie, dass das Euler-Verfahren mit konstanter Schrittweite h für diese Aufgabe auf jedem endlichen Intervall $[0, T]$ konsistent und konvergent von 1. Ordnung ist, d.h.

$$\sup\{|\tau_h(t_j)| : j \in \mathbb{N} \text{ mit } 0 \leq t_j = jh \leq T\} = \mathcal{O}(h)$$
$$\sup\{|\eta_h(t_j)| : j \in \mathbb{N} \text{ mit } 0 \leq t_j = jh \leq T\} = \mathcal{O}(h).$$

(6 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass dies auch auf dem unendlichen Intervall (d.h. Supremum über alle $j \in \mathbb{N}$) richtig ist, sofern $\text{Re } \lambda < 0$. Im Fall $\text{Re } \lambda > 0$ ist es im allgemeinen falsch (Gegenbeispiel!).

(2 Zusatzpunkte)

Hinweis: Nützliche Restgliedabschätzungen für die komplexe Exponentialreihe findet man in Forster, Analysis 1, § 13. Auch zeige man:

$$|z^j - w^j| \leq j\left[\text{Max}\,(|z|, |w|)\right]^{j-1} |z - w| \quad \forall z, w \in \mathbb{C}.$$

Aufgabe 9: [Euler-Verfahren]

Lösen Sie die Verhulst–Gleichung

$$u' = u(1-u),\ t \in [0,10],\ u(0) = u^0$$

numerisch mit dem Euler–Verfahren.
Zu jeweiliger Schrittweite h bezeichne dabei $u_h : \Omega_h \to \mathbb{R}^n$ mit

$$\Omega_h := \{t_j = jh : j = 0, \ldots, 10/h\}$$

die Euler-Näherung sowie $\bar{u} : [0,10] \to \mathbb{R}$ die explizit bekannte Lösung der Verhulst–Gleichung. Legen Sie für den maximalen Konvergenzfehler

$$\eta_{\max}(h, u^0) = \max\ \{|\bar{u}(t_j) - u_h(t_j)| : t_j \in [0,10]\}$$

eine Tabelle an, die sich durch Kombination der Werte $h = 2^{-i}$, $i = 1, \ldots, 6$, und $u^0 = 0.001, 0.1, 0.5, 10$ ergibt. Geben Sie auch die Stelle t_j an, bei der das Maximum angenommen wird, und treffen Sie Vorkehrungen für einen Overflow der Euler–Werte. Interpretieren Sie die Tabelle.

Senden Sie Ihr Programm per Email an dotten@math.uni-bielefeld.de. (6 Punkte)

Numerik II (WS 12/13)
Übungsblatt 03
Lösungen

Aufgabe 7:

Betrachte die inhibierte Michaelis-Menten Reaktion (iMMR)

$$C + E \xrightarrow{k_1} CE \xrightarrow{k_2} D + E$$
$$C + CE \underset{k_{-3}}{\overset{k_3}{\rightleftharpoons}} CCE$$

mit Konzentrationen $c[C]$, $e[E]$, $\kappa[CE]$, $\sigma[CCE]$ und $d[D]$.

(a): Differentialgleichungssystem

(b): Erhaltungsgröße bestimmen & Reduktion der 5-dimensionalen AWA (mit AW $c_0, e_0, \kappa_0, \sigma_0, d_0$) auf eine 3-dimensionale AWA (für c, e und κ)

(c): Stationäre Punkte (unter Annahme: $e_0 + \kappa_0 + d_0 > 0$)

Lösung:

zu (a): (vgl. Skript 1.§2.2). Die (gewöhnliche) Differentialgleichung für (iMMR) lautet

$$\begin{aligned}
c' &= -k_1 c \cdot e - k_3 c\kappa + k_{-3}\sigma, & c(0) &= c_0,\\
e' &= -k_1 c\cdot e + k_2 \kappa, & e(0) &= e_0,\\
\kappa' &= k_1 \cdot c \cdot e - k_2\kappa - k_3 c\kappa + k_{-3}\sigma, & \kappa(0) &= \kappa_0,\\
\sigma' &= k_3 c\kappa - k_{-3}\sigma, & \sigma(0) &= \sigma_0,\\
d' &= k_2\kappa, & d(0) &= d_0.
\end{aligned}$$

zu (b): (Da die rechte Seite unabhängig von d ist, kann die d-Gleichung nachträglich gelöst und somit abgekoppelt werden). Eine Erhaltungsgröße ist nun durch

$$E : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}, \quad E(c, e, \kappa, \sigma, d) := e + \kappa + \sigma$$

gegeben, denn $(u(t) := (c(t), e(t), \kappa(t), \sigma(t), d(t))^T)$

$$\frac{d}{dt} E(u(t)) = \sum_{i=1}^{5} \frac{\partial}{\partial x_i} E(u(t)) \cdot \left[\frac{\partial}{\partial t} u_i(t)\right] = \frac{\partial}{\partial t} u_2(t) + \frac{\partial}{\partial t} u_3(t) + \frac{\partial}{\partial t} u_4(t)$$
$$= e'(t) + \kappa'(t) + \sigma'(t) = 0 \quad \forall t \in [0, T[,$$

d.h.

$$e(t) + \kappa(t) + \sigma(t) = E(c(t), e(t), \kappa(t), \sigma(t), d(t)) = E(c(0), e(0), \kappa(0), \sigma(0), d(0)) = e_0 + \kappa_0 + \sigma_0 =: E_0$$

- Dimensionsreduktion: Wir erhalten weiter

(7.1) $$\sigma(t) = E_0 - e(t) - \kappa(t).$$

Wir müssen nun zeigen, dass die σ-Gleichung mit dieser Setzung immer erfüllt ist und es daher genügt die Gleichungen (c, e, κ) zu lösen:

$$\sigma'(t) = \frac{d}{dt}\left[E_0 - e(t) - \kappa(t)\right] = -e'(t) - \kappa'(t) = k_3 c\kappa - k_{-3}\sigma \quad ✓$$

Ersetzen wir nun σ in den (c, e, κ) Gleichungen durch (7.1) so erhalten wir die 3-dimensionale AWA

$$c' = -k_1 \cdot c \cdot e - k_3 \cdot c \cdot K + k_{-3}(E_0 - e - K)$$
$$e' = -k_1 \cdot c \cdot e + k_2 K$$
$$K' = k_1 \cdot c \cdot e - k_2 K - k_3 c K + k_{-3}(E_0 - e - K)$$

zu (C): Die stationären Punkte erhalten wir durch Bestimmung der Nullstellen der rechten Seite, d.h.

(7.2) $$0 = -k_1 c \cdot e - k_3 c K + k_{-3}(E_0 - e - K)$$

(7.3) $$0 = -k_1 \cdot c \cdot e + k_2 K$$ $(c=0, e=E_0, K=0)$

(7.4) $$0 = k_1 \cdot c \cdot e - k_2 K - k_3 c K + k_{-3}(E_0 - e - K)$$

Es gilt:

$$0 \overset{(7.4)}{=} k_1 \cdot c \cdot e - k_2 K - k_3 c K + k_{-3}(E_0 - e - K)$$
$$\overset{(7.3)}{=} -k_3 c K + k_{-3}(E_0 - e - K)$$
$$\overset{(7.2)}{=} k_1 c e \underset{k_1>0}{\iff} c = 0 \ \underline{\text{oder}} \ e = 0$$

<u>1. Fall</u>: $c = 0$. Die Gleichungen (7.2) – (7.4) gehen über in

(7.2c) $$0 = k_{-3}(E_0 - e - K)$$

(7.3c) $$0 = k_2 K$$

(7.4c) $$0 = -k_2 K + k_{-3}(E_0 - e - K)$$

Aus

- (7.3c) $\overset{k_2>0}{\iff} K = 0$
- (7.2c) oder (7.4c) $\overset{K=0}{\implies} 0 = k_{-3}(E_0 - e) \overset{k_{-3}>0}{\iff} e = E_0 \overset{\text{nach Voraussetzung}}{>} 0$

erhalten wir das Gleichgewicht

(7.5) $$(c, e, K) = (0, E_0, 0)$$

<u>2. Fall</u>: $e = 0$. Die Gleichungen (7.2) – (7.4) gehen über in

(7.2e) $$0 = -k_3 c K + k_{-3}(E_0 - K)$$

(7.3e) $$0 = k_2 K$$

(7.4e) $$0 = -k_2 K - k_3 c K + k_{-3}(E_0 - K)$$

Aus

$$0 \overset{(7.4e)}{=} -k_2 K - k_3 c K + k_{-3}(E_0 - K) \overset{(7.2e)}{=} -k_2 K \overset{k_2>0}{\implies} K = 0.$$

Setze $K=0$ in (7.4e), so gilt

$$0 = k_{-3} E_0 \overset{k_{-3}>0}{\implies} E_0 = 0 \ \lightning \text{ zur Annahme } E_0 = e_0 + K_0 + \delta_0 > 0.$$

Somit ist (7.5) das einzige Gleichgewicht von (7.2) – (7.4) unter der Annahme $E_0 > 0$ $(k_1, k_2, k_3, k_{-3} > 0)$.

Aufgabe 8:

Sei $\lambda \in \mathbb{C}$, $\bar{u}: [0,\infty[\to \mathbb{C}$ Lösung von

$$u'(t) = \lambda u(t) \quad , t \in [0,\infty[,$$
$$u(0) = u^0 \in \mathbb{C}.$$

(a): Expl. Euler-Verfahren (mit konstanter Schrittweite $h>0$) ist, für diese Aufgabe auf jedem endlichen Intervall $[0,T]$ konsistent & konvergent der Ordnung 1.

(b): Für $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$ gilt dies sogar auf $[0,\infty[$. Im Falle $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ ist dies im allgemeinen falsch (Gegenbeispiel).

(Hinweis): Man zeige

$$|z^j - w^j| \leq j \cdot \left(\max\{|z|,|w|\}\right)^{j-1} |z-w| \quad \forall z,w \in \mathbb{C}\ \forall j \in \mathbb{N}_0$$

Lösung:

1: Durch Polynomdivision erhalten wir

(8.1) $$z^j - w^j = (z-w)\sum_{k=0}^{j-1} z^k w^{j-1-k} \quad \forall z,w \in \mathbb{C}\ \forall j \in \mathbb{N}_0.$$

Dies liefert uns

$$|z^j - w^j| \overset{(8.1)}{=} |z-w| \left|\sum_{k=0}^{j-1} z^k \cdot w^{j-1-k}\right|$$
$$\overset{\Delta\text{'s Ungl.}}{\leq} |z-w| \cdot \sum_{k=0}^{j-1} |z|^k \cdot |w|^{j-1-k}$$
$$\overset{\substack{|z| \leq \max\{|z|,|w|\} \\ |w| \leq \max\{|z|,|w|\}}}{\leq} |z-w| \cdot \sum_{k=0}^{j-1} \left(\max\{|z|,|w|\}\right)^{\cancel{k}+j-1-\cancel{k}}$$
$$\overset{\sum_{k=0}^{j-1} 1 = j}{=} j \cdot \left(\max\{|z|,|w|\}\right)^{j-1} |z-w| \quad \forall z,w \in \mathbb{C}\ \forall j \in \mathbb{N}_0.$$

zu (a):

2: Die exakte Lösung $\bar{u}: [0,\infty[\to \mathbb{C}$ ist gegeben durch

(8.2) $$\bar{u}(t) = e^{\lambda t} u^0.$$

Das explizite Euler-Verfahren ist gegeben durch

$$\frac{1}{h}(u^{j+1} - u^j) = f(t_j, u^j) := \lambda u^j$$
$$\iff u^{j+1} = u^j + \lambda h u^j \quad , j \in \mathbb{N}_0$$
$$= (1+\lambda h) u^j = \dots = (1+\lambda h)^{j+1} u^0$$

d.h.

(8.3) $$u^{j+1} = (1+\lambda h)^{j+1} u^0 \quad , j \in \mathbb{N}_0.$$

Setze

$$\mathcal{I}_h := \{ \overset{t_j}{\overset{\shortparallel}{jh}} \mid j \in \mathbb{N}_0 \text{ und } 0 \leq jh \leq T \} = h\mathbb{N}_0 \cap [0,T].$$

③: Konsistenzfehler:

- $$\tau_h(t_j) := \frac{1}{h}\left(\bar{u}(t_{j+1}) - \bar{u}(t_j)\right) - f(t_j, \bar{u}(t_j))$$

$$\overset{(8.2)}{=} \frac{1}{h}\left(e^{\lambda t_{j+1}} u^0 - e^{\lambda t_j} u^0\right) - \lambda e^{\lambda t_j} u^0$$

$$\overset{(j+1)h = t_{j+1} = t_j + h}{=} \frac{1}{h}\Big(\underbrace{e^{\lambda h}}_{= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda h)^k}{k!} = 1 + \lambda h + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\lambda h)^k}{k!}} - 1 - \lambda h\Big) e^{\lambda t_j} u^0$$

$$= \frac{1}{h}\left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\lambda h)^k}{k!}\right) e^{\lambda t_j} u^0, \qquad j \in \mathbb{N}_0 .$$

- $$|\tau_h(t_j)| = \frac{1}{h} \cdot \left|\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\lambda h)^k}{k!}\right| \cdot |e^{\lambda t_j}|\,|u^0|$$

$$\overset{1)}{\leq} \frac{1}{h} \cdot \left(\frac{\cancel{2}\,|\lambda h|^2}{\cancel{2!}}\right) \cdot e^{(\operatorname{Re}\lambda) t_j} \cdot |u^0| \qquad , \text{ falls } |\lambda h| \leq 1 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2} \iff 0 < h \leq \tfrac{3}{2|\lambda|} .$$

$$= |\lambda|^2 \cdot h \cdot e^{(\operatorname{Re}\lambda) t_j} |u^0| \qquad , \ j \in \mathbb{N}_0, \quad 0 < h \leq \frac{3}{2|\lambda|} .$$

1) Forster, Analysis 1, Seite 124, Satz 6 (mit $N = 1$ anwenden): Restglied Abschätzung

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!} + R_{N+1}(z) \qquad , \ z \in \mathbb{C}, \ N \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow |R_{N+1}(z)| \leq \frac{2|z|^{N+1}}{(N+1)!} \quad \forall z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| \leq 1 + \tfrac{1}{2}N \qquad (!)$$

2) $$|e^z| = |e^{\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z}| = \underbrace{|e^{\operatorname{Re} z}|}_{>0} \cdot \underbrace{|e^{i \operatorname{Im} z}|}_{=1} = e^{\operatorname{Re} z} \qquad , \ z \in \mathbb{C}$$

- $$\tau_{h,max} := \sup_{t_j \in J_h} |\tau_h(t_j)|$$

$$\underset{0 < h \leq \frac{3}{2|\lambda|}}{\leq} |\lambda|^2 h |u^0| \cdot \underbrace{\sup_{t_j \in J_h} e^{(\operatorname{Re}\lambda) t_j}}_{\leq \begin{cases} 1 & , \operatorname{Re}\lambda \leq 0 \\ e^{(\operatorname{Re}\lambda) T} & , \operatorname{Re}\lambda > 0 \end{cases} =: C(\operatorname{Re}\lambda, T)}$$

$$\leq C(\operatorname{Re}\lambda, T) \cdot |\lambda|^2 \cdot |u^0| \cdot h = C \cdot h = \mathcal{O}(h) \text{ für } h \to 0 .$$

Konvergenzfehler:

- $$\eta_h(t_j) := \bar{u}(t_j) - \underbrace{u_h(t_j)}_{= u^j}$$

$$= e^{\lambda t_j} u^0 - (1 + \lambda h)^j u^0$$

$$\overset{t_j = jh}{=} e^{\lambda j h} u^0 - (1 + \lambda h)^j u^0$$

$$= \left((e^{\lambda h})^j - (1 + \lambda h)^j\right) u^0$$

$$\cancel{|\eta_h(t_j)| \leq |(e^{\lambda h})^j|}$$

• $|\eta_h(t_j)| = |(e^{\lambda h})^j - (1+\lambda h)^j|\,|u^0|$

Hinweis $\le j\cdot\left(\max\{|e^{\lambda h}|, |1+\lambda h|\}\right)^{j-1}\cdot|e^{\lambda h} - 1+\lambda h|\cdot|u^0|$

$= j\cdot\max\{|e^{\lambda h}|^{j-1}, |1+\lambda h|^{j-1}\}\cdot\left|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(\lambda h)^k}{k!}\right|\cdot|u^0|$

Forster, Ana1 Satz 6 $\le j\cdot\max\{|e^{\lambda h}|^{j-1}, |1+\lambda h|^{j-1}\}\cdot\frac{\cancel{2}\cdot|\lambda h|^2}{\cancel{2!}}\cdot|u^0|$, falls $0<h\le\frac{3}{2|\lambda|}$

$= j\cdot|\lambda|^2h^2|u^0|\max\{e^{(\mathrm{Re}\lambda)h(j-1)}, |1+\lambda h|^{j-1}\}$

$\eta_{h,\max} :=$

• $\sup_{t_j\in J_h}|\eta_h(t_j)| \le |\lambda|^2h^2|u^0|\cdot\sup_{t_j\in J_h}\underbrace{j}_{\le\frac{T}{h}}\cdot\max\{\underbrace{e^{(\mathrm{Re}\lambda)h(j-1)}}_{\le e^{(\mathrm{Re}\lambda)T}\le e^{|\lambda|T}}, \underbrace{|1+\lambda h|^{j-1}}_{\le e^{|\lambda|h(j-1)}\le e^{|\lambda|T}}\}$, $|1+\lambda h|\le(1+|\lambda|h)\le e^{|\lambda|h}$

$0\le t_j = h\cdot j\le T \overset{h>0}{\Rightarrow} j\le\frac{T}{h}$

$\le |\lambda|^2|u^0|Te^{|\lambda|T}\cdot h$

$= C\cdot h = \mathcal{O}(h)$ für $h\to 0$.

~~Alternativ (Konsistenz der Ordnung 1)~~

Betrachte

φ

~~$f:[0,T]\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$~~

zu (b): (4): Konsistenzfehler: ($\mathrm{Re}\lambda<0$, $0<h\le\frac{3}{2|\lambda|}$). $J_h := h\mathbb{N}_0\cap[0,\infty[$.

• $\sup_{t_j\in J_h}|\tau_h(t_j)| \le |\lambda|^2\cdot h\cdot|u^0|\cdot\sup_{t_j\in J_h}\underbrace{e^{(\mathrm{Re}\lambda)t_j}}_{\le 1\ \forall t_j\in J_h}$

$\le |\lambda|^2h|u^0| = C\cdot h = \mathcal{O}(h)$ für $h\to 0$

Konvergenzfehler: ($\mathrm{Re}\lambda<0$)

• Die Funktion

$\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, $x\mapsto x\cdot e^{-ax}$, $a>0$

ist (global) beschränkt, d.h.

(8.4) $\exists C>0:\ x\cdot e^{-ax}\le C\quad\forall x\in\mathbb{R}_+$.

• Weiter gilt

$|1+z|<1 \iff (1+\mathrm{Re}z)^2+(\mathrm{Im}z)^2<1 \iff z\in B_1\binom{-1}{0}$

und somit

$\lambda h\in B_1\binom{-1}{0}\iff|1+\lambda h|<1$

(8.5) $\Rightarrow (j-1)\cdot|1+\lambda h|^{j-1} \overset{q:=}{} = (j-1)q^{j-1} = (j-1)e^{(j-1)\ln(q)} = (j-1)e^{j-1\ln|1+\lambda h|}\le C$,

(8.4), denn: $0\le|1+\lambda h|<1 \Rightarrow \ln|1+\lambda h|<0$

$|1+\lambda h|\le 1-ch\le e^{-ch}$, $c>0$.

- $$\sup_{t_j \in \mathcal{J}_h} |\eta_h(t_j)| \leq |\lambda|^2 h^{\cancel{2}} |u^0| \sup_{t_j \in \mathcal{J}_h} \frac{j}{j-1} \max\Big\{ \underbrace{(j-1)h\, e^{(\mathrm{Re}\lambda)(j-1)h}}_{\substack{\leq C \\ (8.4)\ x:=(j-1)h \\ a:=-\mathrm{Re}\lambda>0}}, \underbrace{(j-1)h\, |1+\lambda h|^{j-1}}_{\substack{\leq C\cdot h \\ (8.5),\ \lambda h \in B_1\left(\begin{smallmatrix}-1\\0\end{smallmatrix}\right)}} \Big\}$$

$$\leq |\lambda|^2 |u^0| \cdot C \cdot \Big(\sup_j \frac{j}{j-1} \Big) \cdot \underbrace{\max\{h, h^2\}}_{=h,\ h\leq 1}$$

$$= |\lambda|^2 |u^0| \cdot C \cdot h = C \cdot h = \mathcal{O}(h) \text{ für } h \to 0.$$

(5): Gegenbeispiel: Betrachte den Spezialfall $\lambda = 1$ mit

$$\bar{u}(t) = e^t u^0, \quad u^0 > 0$$

$$u^j = (1+h)^j u^0, \quad j \in \mathbb{N}_0$$

Dann gilt

$$|\bar{u}(t_j) - u^j| = |e^{t_j} - (1+h)^j|\,|u^0|$$

$$= |e^{jh} - e^{j\ln(1+h)}| \cdot |u^0|$$

$$= e^{jh}\,|1 - \underbrace{e^{j(\ln(1+h)-h)}}_{\to 0\ \ j\to\infty}|\,|u^0|$$

(denn $\ln(1+h) < h \Rightarrow \ln(1+h) - h < 0$)

$$\Rightarrow \lim_{j\to\infty} |\bar{u}(t_j) - u^j| \underset{\substack{\uparrow \\ j \text{ hinreichend} \\ \text{groß}}}{\geq} C \cdot \lim_{j\to\infty} e^{jh} |u^0| = +\infty.$$

Alternativbeweis für den Hinweis in Aufgabe 8:

- Hauptsatz der Differential- & Integralrechnung (Komplexe Version):

  $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ glatte Kurve (d.h. stetig diffbar), $U \subset \mathbb{C}$ offen mit $\gamma([a,b]) =: \overline{\gamma} \subset U$, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph auf U und stetig auf $\overline{\gamma}$.

$$\Longrightarrow \quad \int_\gamma f'(z)\,dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

$$\int_\gamma f'(z)\,dz = \int_a^b f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt$$

- Anwendung:

  $a = 0$, $b = 1$, $\gamma(t) = (1-t)w + tz = w + t(z-w)$ für $z, w \in \mathbb{C}$, $\gamma(0) = w$, $\gamma(1) = z$

  $U = \mathbb{C}$, $f : U \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = z^j$, $j \in \mathbb{N}$, $f'(z) = j \cdot z^{j-1}$,

$$\Longrightarrow \quad z^j - w^j = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = j \int_0^1 \left(w + t(z-w)\right)^{j-1} dt \cdot (z-w) \quad \underline{\forall z, w \in \mathbb{C}}$$

- Beweis

$$|z^j - w^j| \overset{\Delta\text{'s Ungl.}}{\leq} j \cdot \int_0^1 \underbrace{|w + t(z-w)|}_{\leq (1-t)\underbrace{|w|}_{\leq \max\{|w|,|z|\}} + t\underbrace{|z|}_{} \leq \max\{|w|,|z|\} \ \forall t \in [0,1]}{}^{j-1} dt \; |z-w|$$

$$\overset{\int_0^1 dt = 1}{\leq} j \cdot \left(\max\{|w|,|z|\}\right)^{j-1} |z-w| \quad \forall z, w \in \mathbb{C}, \ \forall j \in \mathbb{N}$$

Alternativbeweis für (a)

Das komplexe AWP

$$u'(t) = \lambda u(t), \quad t \in [0,\infty[, \ u : [0,\infty[\to \mathbb{C}$$
$$u(0) = u^0$$

lässt sich ($u(t) = u_1(t) + i u_2(t)$) reell wie folgt formulieren

$$\begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,\lambda & -\mathrm{Im}\,\lambda \\ \mathrm{Im}\,\lambda & \mathrm{Re}\,\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0,\infty[, \quad u_1, u_2 : [0,\infty[\to \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \end{pmatrix}. \qquad \begin{matrix} u_1 := \mathrm{Re}(u) & u_1^0 := \mathrm{Re}(u^0) \\ u_2 := \mathrm{Im}(u) & u_2^0 := \mathrm{Im}(u^0) \end{matrix}$$

Nun lassen sich die Sätze aus der Vorlesung auf

$$f : \underset{\mathbb{R}^2}{\overset{}{U}} \to \mathbb{R}^2, \quad f\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,\lambda & -\mathrm{Im}\,\lambda \\ \mathrm{Im}\,\lambda & \mathrm{Re}\,\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} =: A(\lambda) \cdot v, \quad f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$$

($U \subset \mathbb{R}^2$)

anwenden $\Rightarrow$ Explizites Euler-Verfahren ist für dieses AWP konsistent & konvergent der Ordnung 1 (auf <u>kompakten</u> Intervallen $[0,T]$).

```
function [un,tn] = euler(f,u_init,t_init,t_end,h)
%EULER The function euler contains the explicit Euler method
%           u^{n+1} = u^{n}+h*f(t_n,u^{n}),  n\in\IN_0
%       to solve the initial value problem
%           u'(t) = f(t,u(t)),    t\in[t0,t1]
%           u(t0) = u0.
%       Here t_n=t0+n*h denote the discrete time and u^{n}=u_h(t_n) the
%       solution value of u_h at time t_n.
%       Input and output variables:
%           f      : right hand side, nonlinearity depending on t and u
%           u_init: initial data, initial value
%           t_init: initial time
%           t_end : end time
%           h      : temporal stepsize (must be constant)

% Initialization
tn=t_init:h:t_end;
num_time_steps=length(tn);
un=zeros(1,num_time_steps);
un(1)=u_init;

for i=1:num_time_steps-1
    un(i+1)=un(i)+h*f(tn(i),un(i));
    % Overflow der Euler-Werte pruefen
    if abs(un(i+1))==inf
        fprintf('Overflow at time %6.4f for initial value %6.3f\n',tn(i+1),
u_init);
        break
    end
end
end
```

```
%Aufgabe09

f = @(t,v) v.*(1-v);
u_init=[0.001 0.1 0.5 10];
t_init=0;
t_end=10;
ubar = @(t,u0) u0./((1-exp(-t))*u0+exp(-t));

h=2.^(-(1:6));

num_init_data=length(u_init);
num_temp_step_sizes=length(h);

linecolors={'m','c','r','b','k','g'};
fprintf('     u0           h         error          tn     tn_ind\n');

for i=1:num_init_data
    figure;
    hold on;
    leg=cell(1,num_temp_step_sizes);
    for j=1:num_temp_step_sizes
        % Numerische Berechnung der Loesung (explizites Euler-Verfahren)
        [un,tn]=euler(f,u_init(i),t_init,t_end,h(j));
        % Zeichnen der numerischen Loesungen
        plot(tn,un,linecolors{j});
        leg{j}=['h=',num2str(h(j))];
        % Auswertung der exakten Loesung
        ubar_tn = ubar(tn,u_init(i));
        % Konvergenzfehler
        err = abs(ubar_tn-un);
        conv_err = max(err);
        tn_ind=find(err==conv_err);
        tn_err = tn(tn_ind(1));
        % Bildschirmausgabe (der Konvergenzfehler)
        fprintf('%6.3f     %6.4f     %8.2e     %6.4f          %3.0f\n',u_init(i),h
(j),conv_err,tn_err,tn_ind(1))
        %g=figure('name','Maximale \eta und ihr auftreten','Position',[200 200
400 300]);
        %t1=uitable('Parent',g,'Data',conv_err,'ColumnName',u_init,'RowName',
h,'Position',[0 150 400 150]);
    end
    legend(leg,'Location','Best');
    hold off;
    clear un tn leg;
end
```

```
>> aufgabe09
    u0          h        error          tn    tn_ind
 0.001     0.5000     3.09e-01      7.5000        16
 0.001     0.2500     1.65e-01      7.2500        30
 0.001     0.1250     8.48e-02      7.1250        58
 0.001     0.0625     4.28e-02      7.0000       113
 0.001     0.0312     2.15e-02      6.9688       224
 0.001     0.0156     1.08e-02      6.9375       445
 0.100     0.5000     6.42e-02      2.5000         6
 0.100     0.2500     3.20e-02      2.2500        10
 0.100     0.1250     1.60e-02      2.2500        19
 0.100     0.0625     7.99e-03      2.2500        37
 0.100     0.0312     3.99e-03      2.2188        72
 0.100     0.0156     2.00e-03      2.2031       142
 0.500     0.5000     2.50e-02      2.0000         5
 0.500     0.2500     1.20e-02      2.2500        10
 0.500     0.1250     5.87e-03      2.1250        18
 0.500     0.0625     2.90e-03      2.1875        36
 0.500     0.0312     1.44e-03      2.1562        70
 0.500     0.0156     7.20e-04      2.1719       140
Overflow at time 4.5000 for initial value 10.000
10.000     0.5000          Inf      4.5000        10
Overflow at time 2.7500 for initial value 10.000
10.000     0.2500          Inf      2.7500        12
Overflow at time 2.1250 for initial value 10.000
10.000     0.1250          Inf      2.1250        18
10.000     0.0625     2.10e+00      0.0625         2
10.000     0.0312     6.74e-01      0.0625         3
10.000     0.0156     2.91e-01      0.0625         5
```

- große Startwerte verlangen Kleine Schrittwerten um Overflow zu vermeiden.
- je größer der Startwert, desto früher wird der maximale Fehler angenommen.
- Halbierung der Schrittweite führt zu Halbierung des Fehlers.