Aufgaben zur Vorlesung
Numerik II

W.–J. Beyn
D. Otten

Wintersemester 2012/13
Übungsblatt 4

Abgabe: Mittwoch, 07.11.2012, vor Beginn der Übung

Übung: Mi. 12:15–13:45, V5-148

Aufgabe 10: [Landausymbol und experimentelle Konvergenzordnung]

Gegeben sei eine Fehlerfunktion $\varphi \in C([0,\infty),\mathbb{R})$ mit der Eigenschaft

$$\varphi(h) = Ch^p + \mathcal{O}(h^{p+1})$$

für $0 \neq C \in \mathbb{R}$, $p > 0$ im Grenzwert $h \to 0$. Wie würden Sie die Konstanten C und p schätzen, wenn Ihnen nur zwei Werte $\varphi(h_1)$, $\varphi(h_2)$ für $h_1, h_2 > 0$ bekannt sind?
Bezeichnen $\tilde{C}(h_1,h_2)$, $\tilde{p}(h_1,h_2)$ diese Schätzungen, so zeige man für ein festes Schrittweitenverhältnis $q \in (0,1)$ die Beziehungen

$$\tilde{p}(h,qh) = p + \mathcal{O}(h)$$
$$\tilde{C}(h,qh) = C + \mathcal{O}(h|\ln(h)|)$$

für $h > 0$, $h \to 0$.

(6 Punkte)

Sei nun eine numerisch auswertbare Funktion $y \in C([0,\infty),\mathbb{R})$ gegeben, die

$$y(h) = y_0 + Ch^p + \mathcal{O}(h^{p+1}) \text{ für } h \to 0$$

für gewisse $y_0, C \in \mathbb{R}$ und ein $p > 0$ erfüllt. Wie würden Sie die Konstanten y_0, C und p schätzen, wenn man für festes $q \in (0,1)$ die Werte $y(h)$, $y(qh)$ und $y(q^2h)$ kennt?

(2 Zusatzpunkte)

Aufgabe 11: [explizite Runge-Kutta-Verfahren und lineare AWA]

Gegeben sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ und eine Anfangswertaufgabe mit konstanten Koeffizienten

$$u' = Au \text{ für } t \geq 0,\ u(0) = u^0 \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie, dass jedes explizite Runge-Kutta-Verfahren m-ter Stufe mit der Schrittweite h für dieses System auf eine Rekursion

$$u^{j+1} = A_h u^j,\ j = 0,1,2,\dots \quad A_h \in \mathbb{R}^{n,n},$$

führt, wobei $A_h = q(hA)$ und q ein Polynom vom Grad $\leq m$ ist. Geben Sie für das Euler-Verfahren, die Methode von Heun und das klassische Runge-Kutta-Verfahren das jeweilige Polynom q explizit an. Fällt Ihnen etwas auf?

(6 Punkte)

Aufgabe 12: [Euler-Verfahren]

Lösen Sie die Anfangswertprobleme

$$\text{a):}\quad \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b):}\quad \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -9 & 8 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. analytisch,

2. numerisch durch das explizite Euler–Verfahren und durch die Methode von Heun für die Schrittweiten $h_i = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^i$, $i = 0, \ldots, 5$. Vergleichen Sie jeweils den Konvergenzfehler in der euklidischen Norm an der Stelle $t = 1$

$$\varphi(h_i) = \|u_{h_i}(1) - u(1)\|_2,$$

wobei u die analytische und u_{h_i} die jeweilige numerische Lösung zur Schrittweite h_i bezeichnet. Zeichnen Sie dazu die Fehler im Bezug zur Schrittweite in ein Diagramm mit logarithmisch skalierten Achsen ein. Was fällt Ihnen auf?

Senden Sie Ihr Programm per Email an dotten@math.uni-bielefeld.de.

(6 Punkte)

Numerik II (WS 12/13)
Übungsblatt 04
Lösungen

Aufgabe 10:

Gegeben sei eine Fehlerfunktion $\varphi \in C([0,\infty[, \mathbb{R})$ mit
$$\varphi(h) = Ch^p + \mathcal{O}(h^{p+1}) \quad \text{für } h \downarrow 0, \quad 0 \neq C \in \mathbb{R}, \; p > 0$$

(a): $h_1, h_2 > 0$ und $\varphi(h_1), \varphi(h_2)$ seien bekannt. Wie würden Sie C und p schätzen?

(b): $\tilde{C}(h_1,h_2)$, $\tilde{p}(h_1,h_2)$ bezeichnen diese Schätzungen. Zeige für $q \in \,]0,1[$
$$\tilde{p}(h, qh) = p + \mathcal{O}(h) \qquad \text{für } h \downarrow 0 \quad (\text{d.h. } h \to 0 \;\&\; h > 0)$$
$$\tilde{C}(h, qh) = C + \mathcal{O}(h|\ln h|) \quad \text{für } h \downarrow 0$$

Zusatz: (c): $y \in C([0,\infty[, \mathbb{R})$ mit
$$y(h) = y_0 + Ch^p + \mathcal{O}(h^{p+1}) \quad \text{für } h \downarrow 0, \quad y_0, C \in \mathbb{R}, \; p > 0$$
$q \in \,]0,1[$. $y(h), y(qh), y(q^2h)$ seien bekannt. Wie würden Sie y_0, C, p schätzen?

Lösung:

zu (a): Wir wissen
$$\varphi(h) \approx C \cdot h^p \quad \text{für kleine } h > 0$$

- Schätzung von p:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(h_1) &\approx C \cdot h_1^p \\ \varphi(h_2) &\approx C \cdot h_2^p \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\varphi(h_1)}{\varphi(h_2)} \approx \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^p$$
$$\Rightarrow \ln\left(\frac{\varphi(h_1)}{\varphi(h_2)}\right) \approx \ln\left(\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^p\right) = p \cdot \ln\left(\frac{h_1}{h_2}\right)$$
$$\Rightarrow p \approx \frac{\ln\left(\frac{\varphi(h_1)}{\varphi(h_2)}\right)}{\ln\left(\frac{h_1}{h_2}\right)} =: \tilde{p}(h_1,h_2) =: \mathrm{EOC}(h_1,h_2)$$
(experimental order of convergence)

- Schätzung von C:

$$\varphi(h_1) \approx C \cdot h_1^p \Rightarrow C \approx \frac{\varphi(h_1)}{h_1^p} \approx \underbrace{\frac{\varphi(h_1)}{h_1^{\tilde{p}(h_1,h_2)}}}_{\overset{?}{=}} =: \tilde{C}(h_1,h_2)$$

$$\varphi(h_2) \approx C \cdot h_2^p \Rightarrow C \approx \frac{\varphi(h_2)}{h_2^p} \approx \frac{\varphi(h_2)}{h_2^{\tilde{p}(h_1,h_2)}}$$

zu (b): • Schätzung $\tilde{p}$:

$$|p-\tilde{p}| = \left|p - \frac{\ln\left(\frac{\varphi(h_1)}{\varphi(h_2)}\right)}{\ln\left(\frac{h_1}{h_2}\right)}\right| = \left|p - \frac{\ln\left(\frac{Ch_1^p+\mathcal{O}(h_1^{p+1})}{Ch_2^p+\mathcal{O}(h_2^{p+1})}\right)}{\ln\left(\frac{h_1}{h_2}\right)}\right| =$$

$$\overset{(A)}{=} \left|p - \frac{p\cdot\ln\left(\frac{1}{q}\right)+\ln\left(\frac{1+\mathcal{O}(h)}{1+\mathcal{O}(h)}\right)}{\ln\left(\frac{1}{q}\right)}\right| = \left|\ln\left(\frac{1+\mathcal{O}(h)}{1+\mathcal{O}(h)}\right)\right| = \mathcal{O}(h) \text{ für } h\downarrow 0$$

$$(A):\ \ln\left(\frac{Ch_1^p+\mathcal{O}(h_1^{p+1})}{Ch_2^p+\mathcal{O}(h_2^{p+1})}\right) \overset{\substack{h:=h_1 \\ h_2 \overset{!}{=} qh_1 = qh}}{=} \ln\left(\frac{Ch^p+\mathcal{O}(h^{p+1})}{Cq^ph^p+\mathcal{O}(h^{p+1})}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{Ch^p}{Cq^ph^p}\cdot\frac{1+\mathcal{O}(h)}{1+\mathcal{O}(h)}\right) = \ln\left(\frac{1}{q^p}\right) + \underbrace{\ln\left(\frac{1+\mathcal{O}(h)}{1+\mathcal{O}(h)}\right)}_{=\mathcal{O}(h)}$$

$$= p\cdot\ln\left(\frac{1}{q}\right) + \mathcal{O}(h) \text{ für } h\downarrow 0$$

$$\ln\left(\frac{1+\mathcal{O}(h)}{1+\mathcal{O}(h)}\right) = \ln(1+\mathcal{O}(h)) - \ln(1+\mathcal{O}(h)) = \mathcal{O}(h)$$

$$\ln(1+x) = \underbrace{\ln(1)}_{=0} + x + \mathcal{O}(x^2) \quad x\to 0$$

• Schätzung $\tilde{C}$:

$$(B):\ \tilde{C} = \frac{\varphi(h_1)}{h_1^{\tilde{p}(h_1,h_2)}} \overset{h_1=h}{=} \frac{Ch^p+\mathcal{O}(h^{p+1})}{h^{\tilde{p}}} = Ch^{p-\tilde{p}} + \mathcal{O}(h^{p+1-\tilde{p}})$$

$$\overset{\pm C}{=} C + C(h^{p-\tilde{p}}-1) + \mathcal{O}(h^{p+1-\tilde{p}})$$

$$(C):\ h^{p-\tilde{p}} = h^{\mathcal{O}(h)} = \exp(\mathcal{O}(h)\cdot|\ln(h)|) = 1 + \mathcal{O}(h|\ln(h)|)$$

$$\mathcal{O}(h^{p-\tilde{p}+1}) = \mathcal{O}(h^{1+\mathcal{O}(h)}) = \mathcal{O}(h\cdot h^{\mathcal{O}(h)}) = \mathcal{O}(h^2|\ln h|)$$

Also:

$$|C-\tilde{C}| \overset{(B)}{=} |C(h^{p-\tilde{p}}-1) + \mathcal{O}(h^{p+1-\tilde{p}})|$$

$$= \mathcal{O}(h|\ln(h)|) + \mathcal{O}(h^2|\ln(h)|)$$

$$= \mathcal{O}(h|\ln(h)|)$$

zu (c): Wir zeigen diese Aussage sogar für vektorwertige Funktionen

$$y \in C([0,\infty[, \mathbb{R}^n)$$

mit

$$y(h) = y_0 + h^p v + \mathcal{O}(h^{p+1}) \quad , v \in \mathbb{R}^n, y_0 \in \mathbb{R}^n$$

- Schätzung von p:

Setze

$$\varphi(h) := y(h) - y(qh) = h^p v - q^p h^p v + \mathcal{O}(h^{p+1}) = (1-q^p)h^p v + \mathcal{O}(h^{p+1})$$

$$\Rightarrow \varphi(qh) = y(qh) - y(q^2 h) = (1-q^p) q^p h^p v + \mathcal{O}(h^{p+1})$$

Wir erhalten

$$\|\varphi(h)\| = (1-q^p) h^p \|v\| + \mathcal{O}(h^{p+1})$$

$$\|\varphi(qh)\| = (1-q^p) q^p h^p \|v\| + \mathcal{O}(h^{p+1})$$

und somit

$$\frac{\|\varphi(qh)\|}{\|\varphi(h)\|} = \frac{(1-q^p) q^p h^p \|v\| + \mathcal{O}(h^{p+1})}{(1-q^p) h^p \|v\| + \mathcal{O}(h^{p+1})}$$

$$= \frac{(1-q^p) h^p \|v\|}{(1-q^p) h^p \|v\|} \cdot \frac{q^p + \mathcal{O}(h)}{1 + \mathcal{O}(h)} = \frac{q^p + \mathcal{O}(h)}{1 + \mathcal{O}(h)} = q^p + \mathcal{O}(h)$$

Daher

$$\frac{\|\varphi(qh)\|}{\|\varphi(h)\|} \approx q^p \Rightarrow \ln\left(\frac{\|\varphi(qh)\|}{\|\varphi(h)\|}\right) \approx \ln(q^p) = p \cdot \ln q$$

$$\Rightarrow p \approx \ln\left(\frac{\|\varphi(qh)\|}{\|\varphi(h)\|}\right) \cdot \frac{1}{\ln q} =: \tilde{p}$$

d.h.

$$\tilde{p}(h, qh, q^2 h) := \frac{1}{\ln q} \cdot \ln\left(\frac{\|y(qh) - y(q^2 h)\|}{\|y(h) - y(qh)\|}\right) =: EOC(h, qh, q^2 h).$$

- Schätzung v:

$$y(h) \approx y_0 + h^p v$$

$$\Rightarrow v \approx h^{-p} \cdot (y(h) - y_0) \approx h^{-\tilde{p}} (y(h) - y_0) =: \tilde{v}(h, qh, q^2 h)$$

- Schätzung y_0:

$$y(h) \approx y_0 + h^p v$$

$$\Rightarrow y_0 \approx y(h) - h^p v \approx y(h) - h^{\tilde{p}} \tilde{v} =: \tilde{y}_0(h, qh, q^2 h).$$

Alternative:

$$y(h) = y_0 + h^p v + \mathcal{O}(h^{p+1}), \quad y(qh) = y_0 + q^p h^p v + \mathcal{O}(h^{p+1})$$

$$\Rightarrow y(h) - y(qh) = (1-q^p) h^p v + \mathcal{O}(h^{p+1})$$

$$\Rightarrow \frac{y(h) - y(qh)}{(1-q^p) \cdot h^p} = v + \mathcal{O}(h) \Rightarrow \tilde{v}(h, qh, q^2 h) := \frac{y(h) - y(qh)}{(1-q^{\tilde{p}}) h^{\tilde{p}}}$$

Vorbereitung zur Aufgabe 11:

Wiederholung:

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad u(t_0) = u^0$$

Allgemeines Einschrittverfahren (ESV):

$$\underbrace{\frac{1}{h}\left(u(t_{j+1}) - u(t_j)\right)}_{\text{vorwärtsgenommener Differenzenquotient}} = \underbrace{\varphi(t_j, u(t_j), h)}_{\text{Verfahrensfunktion}}, \quad u(t_0) = u^0.$$

Allgemeines (implizites) Runge-Kutta-Verfahren (RKV):

Verfahrensfunktion: (m ← Stufe des RKV's)

$$\varphi(t, v, s) := \sum_{i=1}^{m} \gamma_i K_i(t, v, s),$$

Zuwachsvektoren:

(2.27) (implizite RK-Gleichungen)

$$K_i(t, v, s) := f\left(t + \alpha_i s, \; v + s \sum_{l=1}^{m} \beta_{il} K_l(t, v, s)\right), \quad i = 1, \dots, m.$$

Diese Gleichung bestimmt die K_i's. I. Allg. nichtlineares GS!

Iterationsfolge:

Schreibweise: $u^j = u(t_j)$

$$\begin{aligned}
(\leadsto u^{j+1} &= u^j + h \cdot \varphi(t_j, u^j, h) \\
&= u^j + h \cdot \sum_{i=1}^{m} \gamma_i K_i(t_j, u^j, h) \\
&= u^j + h \cdot \sum_{i=1}^{m} \gamma_i f\left(t_j + \alpha_i h, \; u^j + h \sum_{l=1}^{m} \beta_{il} K_l(t_j, u^j, h)\right)), \quad j \in \mathbb{N}_0
\end{aligned}$$

- auch nicht-äquidistante Schrittweiten möglich

RKV heißt explizit $:\Longleftrightarrow \beta_{ij} = 0 \quad 1 \le i \le j \le m$ → K_i's lassen sich rekursiv bestimmen

" " halbimplizit $:\Longleftrightarrow \beta_{ij} = 0 \quad 1 \le i < j \le m$

Butcher-tableau, Koeffizientenschema:

$$\begin{array}{c|ccc}
\alpha_1 & \beta_{11} & \cdots & \beta_{1m} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\alpha_m & \beta_{m1} & \cdots & \beta_{mm} \\
\hline
 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_m
\end{array}$$

(α, β, γ) Verfahrensdaten für das RKV

Beispiele: a) Explizite-Verfahren:

- Euler-Verfahren:

$$\begin{array}{c|c}
0 & 0 \\
\hline
 & 1
\end{array} \qquad \begin{aligned} m &= 1 \\ \alpha &= 0 \\ \gamma &= 0 \\ \beta &= 0 \end{aligned} \qquad \varphi(t, v, s) = K_1(t, v, s) = f(t, v)$$

- Heun-Verfahren:

$$\begin{array}{c|cc}
0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 \\
\hline
 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}
\end{array} \qquad \begin{aligned} m &= 2 \\ \alpha &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \beta &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 11:

Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{n,n}$

$$(11.1) \qquad \begin{Bmatrix} u' = Au & , t \geq 0 \\ u(0) = u^0 \in \mathbb{R}^n & \end{Bmatrix}$$

(a): Jedes explizite RK-Verfahren m-ter Stufe mit Schrittweite $h > 0$ führt für (11.1) auf eine Rekursion

$$u^{j+1} = A_h u^j \quad , \; j = 0, 1, 2, \dots \quad ,$$

wobei

$$A_h = q(hA) \in \mathbb{R}^{n,n}$$

und $q : \mathbb{R}^{n,n} \to \mathbb{R}^{n,n}$ Polynom mit Grad $q \leq m$.

(b): Geben Sie für das

- Explizite Euler-Verfahren
- Heun-Verfahren
- Klassische RK-Verfahren

das jeweilige Polynom q an. Was fällt Ihnen auf?

Lösung:

zu (a): Zeige per Induktion

$$(11.2) \qquad \forall \underset{(1 \leq j \leq m)}{j \in \mathbb{N}} \; \exists q_j : \mathbb{R}^{n,n} \to \mathbb{R}^{n,n} \text{ Polynom mit Grad} p_j \leq j : \; h \cdot K_j(t, v, h) = q_j(hA) v \quad \forall h > 0 \; \forall v \in \mathbb{R}^n, \dots$$

(IA) $i = 1$:

$$h \cdot K_1(t, v, h) = h \cdot Av = q_1(hA) v \quad , \; q_1(X) = X , \; \text{Grad } q_1 \leq 1 .$$

(IS): $i \to i+1$:

$$h \cdot K_{i+1}(t, v, h) = hA \cdot \left(v + h \cdot \sum_{j=1}^{i} \beta_{i+1,j} K_j(t, v, h) \right)$$

$$\overset{\text{IV}}{\underset{\text{für } j=1,\dots,i}{=}} hA \left(v + \sum_{j=1}^{i} \beta_{i+1,j} \, q_j(hA) v \right)$$

$$= \underbrace{\left(hA + \sum_{j=1}^{i} \beta_{i+1,j} (hA) \cdot q_j(hA) \right)}_{=: q_{i+1}(hA)} v$$

$$=: q_{i+1}(hA) , \quad \text{Grad } q_{i+1} \leq i+1 .$$

Grad $q_j \leq j$ nach (IV) für $j = 1, \dots, i$

∎

Wir erhalten

$$q_i(X) = X + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} X q_j(X)$$

Runge-Kutta-Verfahren:

$$u^{j+1} = u^j + h \cdot \varphi(t_j, u^j, h)$$
$$= u^j + h \cdot \sum_{i=1}^{m} \gamma_i k_i(t_j, u^j, h)$$

RK-Verf. explizit

$$\overset{!}{=} u^j + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i q_i(hA) u^j$$
$$= \underbrace{\left(I_n + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i q_i(hA)\right)}_{=:\, q(hA) = A_h} u^j$$

Wir erhalten:

$$q(X) = I_n + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i q_i(X)$$
$$= I_n + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i X + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{i-1} \gamma_i \beta_{ij} X q_j(x)$$

und

$$\operatorname{Grad} q \leq m.$$

da $\operatorname{Grad} q_i \leq m \quad i = 1, \ldots, m$

zu (b): • Euler-Verfahren: $(m=1)$

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$q_1(X) = X$$
$$q(x) = I_n + \gamma_1 q_1(x) = I_n + X$$

• Heun-Verfahren: $(m=2)$

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

$$q_1(X) = X$$
$$q_2(X) = X + \beta_{21} X q_1(X) = X + X^2$$
$$q(X) = I_n + \gamma_1 q_1(X) + \gamma_2 q_2(x)$$
$$= I_n + X + \frac{1}{2} X^2$$

- Klassisches RK-Verfahren : $(m=4)$

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

$$q_1(X) = X$$

$$q_2(X) = X + \beta_{21} X q_1(X) = X + \frac{1}{2} X^2$$

$$q_3(X) = X + \beta_{31} X q_1(X) + \beta_{32} X q_2(X)$$
$$= X + \frac{1}{2} X^2 + \frac{1}{4} X^3$$

$$q_4(X) = X + \beta_{41} X q_1(X) + \beta_{42} X q_2(X) + \beta_{43} X q_3(X)$$
$$= X + X^2 + \frac{1}{2} X^3 + \frac{1}{4} X^4$$

$$q(X) = I_n + \gamma_1 q_1(X) + \gamma_2 q_2(X) + \gamma_3 q_3(X) + \gamma_4 q_4(X)$$
$$= I_n + \frac{1}{6} X + \frac{1}{3} X + \frac{1}{6} X^2 + \frac{1}{3} X + \frac{1}{6} X^2 + \frac{1}{12} X^3 + \frac{1}{6} X + \frac{1}{6} X^2 + \frac{1}{12} X^3 + \frac{1}{24} X^4$$
$$= I_n + X + \frac{1}{2} X^2 + \frac{1}{6} X^3 + \frac{1}{24} X^4$$

Es fällt folgendes auf: $q_m(X) := q(X)$

$$q_m(X) = \sum_{j=0}^{m} \frac{X^j}{j!}$$ ($\hat{=}$ ersten $m+1$ Summanden der Exponentialreihe)

Alternativlösung: (Aufgabe 11) very nice!

Direct Approach: $f(t,v) = Av$, h konstant, $m \in \mathbb{N}$ beliebig.

$$h \cdot \varphi(t,v,h) = \sum_{j_1=1}^{m} \gamma_{j_1} h \cdot k_{j_1}(t,v,h)$$

$$\overset{\text{RK-Verf. explizit}}{=} \sum_{j_1=1}^{m} \gamma_{j_1} \cdot h \cdot f\Big(t+\alpha_{j_1} h,\ v + h \sum_{j_2=1}^{j_1-1} \beta_{j_1 j_2} k_{j_2}(t,v,h)\Big)$$

$$= \Big(\sum_{j_1=1}^{m} \gamma_{j_1}\Big)(hA)v + \sum_{j_1=1}^{m} \sum_{j_2=1}^{j_1-1} \gamma_{j_1} \beta_{j_1 j_2} h^2 A\, k_{j_2}(t,v,h)$$

$$\overset{\text{RK-Verf. explizit}}{=} \Big(\sum_{j_1=1}^{m} \gamma_{j_1}\Big)(hA)v + \sum_{j_1=1}^{m} \sum_{j_2=1}^{j_1-1} \gamma_{j_1} \beta_{j_1 j_2} h^2 A\, f\Big(t+\alpha_{j_2} h,\ v + h \sum_{j_3=1}^{j_2-1} \beta_{j_2 j_3} k_{j_3}(t,v,h)\Big)$$

$$= \Big(\sum_{j_1=1}^{m} \gamma_{j_1}\Big)(hA)v + \Big(\sum_{j_1=1}^{m} \sum_{j_2=1}^{j_1-1} \gamma_{j_1} \beta_{j_1 j_2}\Big)(hA)^2 v + \sum_{j_1=1}^{m} \sum_{j_2=1}^{j_1-1} \sum_{j_3=1}^{j_2-1} \gamma_{j_1} \beta_{j_1 j_2} \beta_{j_2 j_3} h^3 A^2 k_{j_3}(t,v,h)$$

$$= \dots$$

$$= \Big[\Big(\sum_{j_1=1}^{m} \gamma_{j_1}\Big)(hA) + \Big(\sum_{j_1=1}^{m} \sum_{j_2=1}^{j_1-1} \gamma_{j_1} \beta_{j_1 j_2}\Big)(hA)^2 + \Big(\sum_{j_1=1}^{m} \sum_{j_2=1}^{j_1-1} \sum_{j_3=1}^{j_2-1} \gamma_{j_1} \beta_{j_1 j_2} \beta_{j_2 j_3}\Big)(hA)^3$$

$$+ \dots + \Big(\sum_{j_1=1}^{m} \sum_{j_2=1}^{j_1-1} \cdots \sum_{j_m=1}^{j_{m-1}-1} \gamma_{j_1} \beta_{j_1 j_2} \cdots \beta_{j_{m-1} j_m}\Big)(hA)^m\Big] v$$

Besitzt max. $m,\ m-1,\ \dots,\ 1$ Summanden. Nächste Summe wäre also leer!! Damit muss dies der letzte Term sein

Es folgt:

$$u^{j+1} = u^j + h \cdot \varphi(t_j, u^j, h) = q(hA) \cdot u^j =: A_h u^j$$

mit

$$(11.3)\quad q(X) = I_n + \Big(\sum_{j_1=1}^{m} \gamma_{j_1}\Big) \cdot X + \Big(\sum_{j_1=1}^{m} \sum_{j_2=1}^{j_1-1} \gamma_{j_1} \beta_{j_1 j_2}\Big) X^2 + \Big(\sum_{j_1=1}^{m} \sum_{j_2=1}^{j_1-1} \sum_{j_3=1}^{j_2-1} \gamma_{j_1} \beta_{j_1 j_2} \beta_{j_2 j_3}\Big) X^3$$

$$+ \dots + \Big(\underbrace{\sum_{j_1=1}^{m} \sum_{j_2=1}^{j_1-1} \cdots \sum_{j_m=1}^{j_{m-1}-1}}_{m \text{ Summanden}} \gamma_{j_1} \beta_{j_1 j_2} \cdots \beta_{j_{m-1} j_m}\Big) X^m$$

und

Grad $q \leq m$.

(11.4) Merke: 1) $\sum_{j_1=1}^{m} \gamma_{j_1} = 1$ ist Konsistenzbedingung für RK-Verfahren.

2) Für Euler, Heun & Klass. RK-Verfahren beobachten wir

$$(11.5)\quad q(X) = \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!} X^j = I_n + X + \frac{1}{2!} X^2 + \frac{1}{3!} X^3 + \dots + \frac{1}{m!} X^m$$

Damit ergeben sich Bedingungsgleichungen für die Verfahrenswerte α, β, γ insofern wir (11.3) mit (11.5) vergleichen. Insbesondere sehen wir, dass (11.4) gelten muss.

3) Da die Lösung der kontinuierlichen Gleichung $e^{At} u_0$ ist, sollte es das Ziel sein $A_h \approx \exp(Ah)$ zu wählen, um von der Zeit t_j zu $t_j + h = t_{j+1}$ zu gelangen. Dies motiviert den Koeffizientenvergleich im Fall $f(t,v) = Av$.

Aufgabe 12:

Lösen Sie die AWP

(a) : $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}' = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) : $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}' = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -9 & 8 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. analytisch

und

2. numerisch (mit exp. Euler-Verfahren & Heun-Methode)

$$h_i = \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^i \quad , \; i = 0, \dots, 5$$

3. Vergleichen Sie den Konvergenzfehler in $\|.\|_2$ zur Zeit $t=1$

$$\varphi(h_i) = \|u_{h_i}(1) - u(1)\|_2 \, ,$$

und plotten Sie diesen in ein Diagramm. Was fällt Ihnen auf?

Lösung:

zu 1. (a): $A := \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}$

- Eigenwerte & Eigenvektoren:

$\lambda_1 = -1 \qquad v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = -\frac{1}{2} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Diagonalmatrix:

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

- Transformationsmatrix:

$Q = \frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\quad \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow Q^{-1} A Q = D$$

- Fundamentallösung:

$$Y(t) = e^{At} = e^{QDQ^{-1}t} = Q e^{Dt} Q^{-1} = Q \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{t}{2}} \end{pmatrix} Q^{-1}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} e^{-t} + 4e^{-\frac{t}{2}} & -2e^{-t} + 2e^{-\frac{t}{2}} \\ -2e^{-t} + 2e^{-\frac{t}{2}} & 4e^{-t} + e^{-\frac{t}{2}} \end{pmatrix}$$

- Lösung AWA:

$$u(t) = Y(t)\, u^0 = Y(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -e^{-t} + 6e^{-\frac{t}{2}} \\ 2e^{-t} + 3e^{-\frac{t}{2}} \end{pmatrix}$$

(b):

$$A := \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -9 & 8 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

- Eigenwerte & Eigenvektoren:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} \qquad , \; v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2} \qquad \text{(doppeltes Ew!)} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ Lösung von } (A-\lambda I)\, v_2 = v_1$$

- Jordanmatrix:

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- Transformationsmatrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Q^{-1} A Q = J$$

- Fundamentallösung:

$$Y(t) = e^{At} = e^{QJQ^{-1}t} = Q e^{Jt} Q^{-1} = Q \begin{pmatrix} e^{-\frac{t}{2}} & t \cdot e^{-\frac{t}{2}} \\ 0 & e^{-\frac{t}{2}} \end{pmatrix} Q^{-1}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} (5-2t)\, e^{-\frac{t}{2}} & 4t\, e^{-\frac{t}{2}} \\ -t\, e^{-\frac{t}{2}} & (5+2t)\cdot e^{-\frac{t}{2}} \end{pmatrix}$$

- Lösung AWA:

$$u(t) = Y(t)\, u^0 = Y(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5+2t \\ 5+t \end{pmatrix} \cdot e^{-\frac{t}{2}} .$$

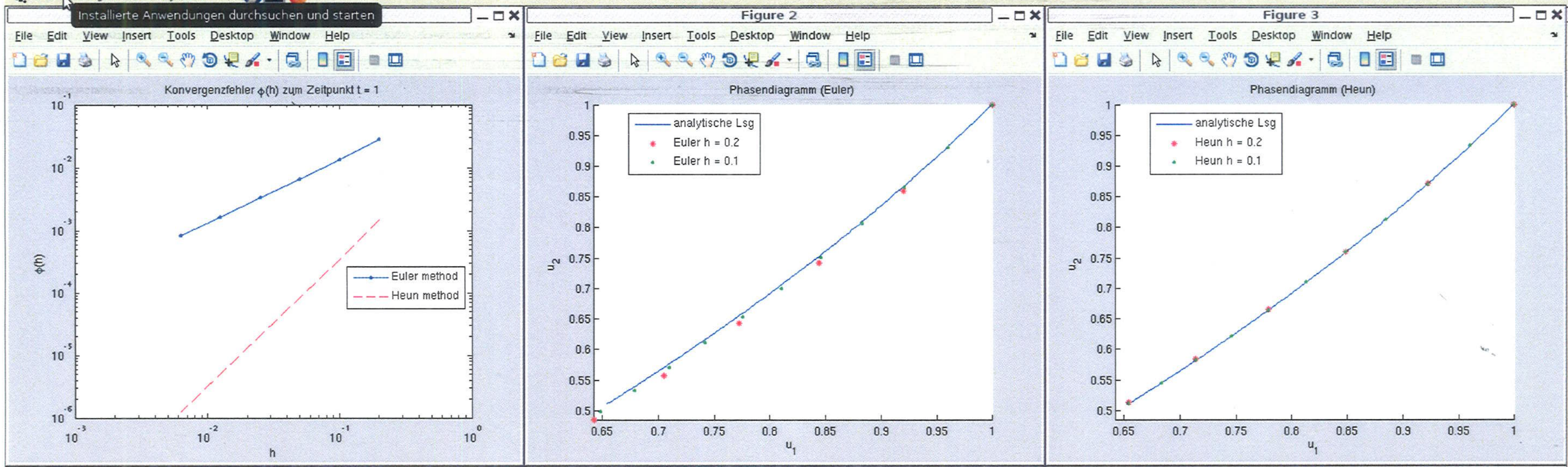
zu 2. & 3.

```
function aufgabe12

%% Parameters
% (a)
%A = 1/10*[-6 2;2 -9];
% (b)
A = 1/10*[-9 8;-2 -1];

u_init = [1;1];
t0 = 0;
t1 = 1;

h = 1/5*(1/2).^(0:5);

%% Initializing memory
for n=1:length(h)
    t_grid{n} = t0:h(n):t1;
    u_euler{n} = zeros(length(u_init),length(t_grid{n}));
    u_heun{n} = zeros(length(u_init),length(t_grid{n}));
    u_euler{n}(:,1) = u_init;
    u_heun{n}(:,1) = u_init;
end

%% Analytic solution
u_sol = zeros(length(u_init),length(t_grid{length(h)}));
for m=1:length(t_grid{length(h)})
    u_sol(:,m) = u_anal(t_grid{length(h)}(m),A,u_init,t0);
end

%% Explicit Euler method:
for n=1:length(h)
    for m=1:length(t_grid{n})-1
        u_euler{n}(:,m+1) = u_euler{n}(:,m) + h(n)*A*u_euler{n}(:,m);
    end
end

%% Heun method
for n=1:length(h)
    for m=1:length(t_grid{n})-1
        % ausfuehrlich
        %u_heun{n}(:,m+1) = u_euler{n}(:,m) + h(n)/2*(A*u_euler{n}(:,m)+A*
(u_euler{n}(:,m)+h(n)*A*u_euler{n}(:,m)));
        % kompakt
        u_heun{n}(:,m+1) = u_heun{n}(:,m) + (h(n)*A+1/2*h(n)^2*A^2)*u_heun{n}
(:,m);
    end
end

%% Calculating the error at time t1
for n=1:length(h)
    err_euler(n) = norm(u_euler{n}(:,end)-u_sol(:,end));
    err_heun(n) = norm(u_heun{n}(:,end)-u_sol(:,end));
end

%% Calculating experimental order of convergence (EOC)
for n=2:length(h)
```

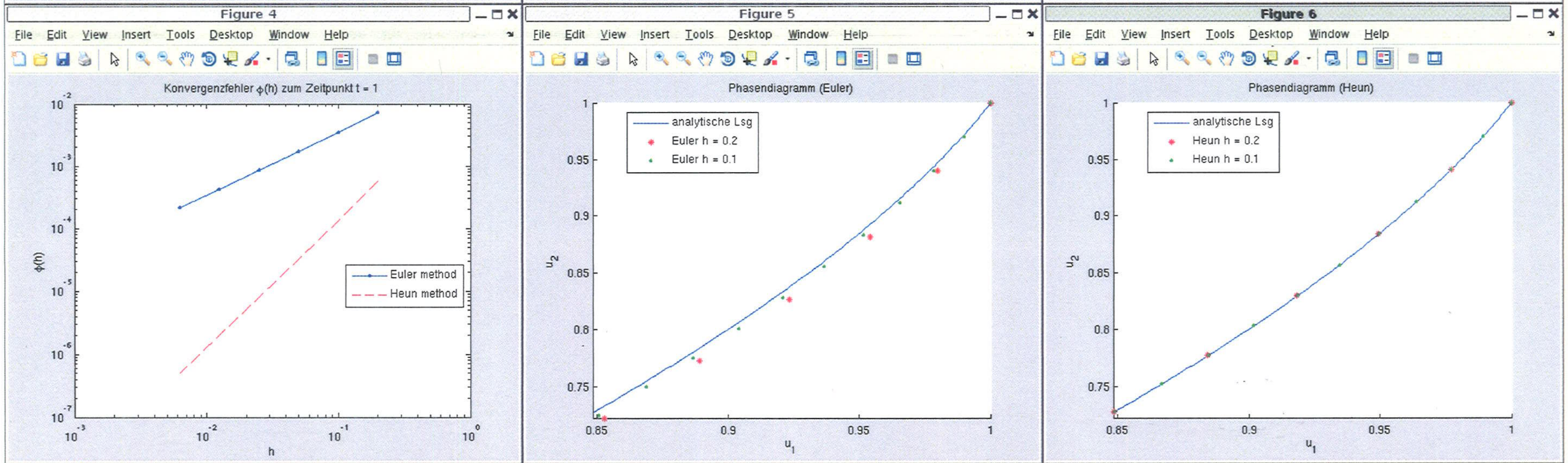
```
    EOC_euler(n) = log(err_euler(n-1)/err_euler(n)) / log(h(n-1)/h(n));
    EOC_heun(n) = log(err_heun(n-1)/err_heun(n)) / log(h(n-1)/h(n));
end

%% Plotting and data output
% plotting the error with logarithmic scale
figure
loglog(h,err_euler,'.-b')
hold on
loglog(h,err_heun,'--r')
hold off
xlabel('h')
ylabel('\phi(h)')
title(['Konvergenzfehler \phi(h) zum Zeitpunkt t = ',num2str(t1)])
legend('Euler method','Heun method','Location','Best');

% plotting a phase diagramm (i.e. image of the solution u)
xmax=max([u_euler{1}(1,:) u_euler{1}(1,:) u_heun{1}(1,:) u_heun{2}(1,:)]);
xmin=min([u_euler{1}(1,:) u_euler{1}(1,:) u_heun{1}(1,:) u_heun{2}(1,:)]);
ymax=max([u_euler{1}(2,:) u_euler{1}(2,:) u_heun{1}(2,:) u_heun{2}(2,:)]);
ymin=min([u_euler{1}(2,:) u_euler{1}(2,:) u_heun{1}(2,:) u_heun{2}(2,:)]);

figure
hold on
plot(u_sol(1,:),u_sol(2,:))
plot(u_euler{1}(1,:),u_euler{1}(2,:),'*r')
plot(u_euler{2}(1,:),u_euler{2}(2,:),'.g')
hold off
title('Phasendiagramm (Euler)')
xlabel('u_1')
ylabel('u_2')
axis([xmin xmax ymin ymax])
legend('analytische Lsg',['Euler h = ' num2str(h(1))],['Euler h = ' num2str(h↙
(2))],'Location','Best')

figure
hold on
plot(u_sol(1,:),u_sol(2,:))
plot(u_heun{1}(1,:),u_heun{1}(2,:),'*r')
plot(u_heun{2}(1,:),u_heun{2}(2,:),'.g')
hold off
title('Phasendiagramm (Heun)')
xlabel('u_1')
ylabel('u_2')
axis([xmin xmax ymin ymax])
legend('analytische Lsg',['Heun h = ' num2str(h(1))],['Heun h = ' num2str(h↙
(2))],'Location','Best')

% printing the errors with fprintf
% \n = newline
fprintf('\n        Musterloesung zu Aufgabe 12, Numerik2, WS'2012/13\n\n')
fprintf('             h           phi(h)       exp. Konvergenzordnung\n')
fprintf('        -----------------------------------------------------\n')
fprintf('Euler:\n')
fprintf('          %6.5f     %10.9f\n',h(1),err_euler(1))
for n = 2:length(h)
```

```
    fprintf('          %6.5f     %10.9f     %10.9f\n',h(n),err_euler(n),EOC_euler
(n))
end
fprintf('Heun:\n')
fprintf('          %6.5f     %10.9f\n',h(1),err_heun(1))
for n = 2:length(h)
    fprintf('          %6.5f     %10.9f     %10.9f\n',h(n),err_heun(n),EOC_heun(n))
end

end

% Analytic solution
function y=u_anal(t,A,u_init,t0)
    y = expm(A*(t-t0))*u_init;
    % (a)
    %y = 1/5*[-exp(-t)+6*exp(-t/2); 2*exp(-t)+3*exp(-t/2)];
    % (b)
    %y = 1/5*[(5+2*t).*exp(-t/2);(5+t).*exp(-t/2)];
end
```

(a):



(b):




```
    EOC_euler(n) = log(err_euler(n-1)/err_euler(n)) / log(h(n-1)/h(n));
    EOC_heun(n) = log(err_heun(n-1)/err_heun(n)) / log(h(n-1)/h(n));
end

%% Plotting and data output
% plotting the error with logarithmic scale
figure
```

Musterloesung zu Aufgabe 12, Numerik2, WS 2012/13

(a)

	h	phi(h)	exp. Konvergenzordnung
Euler:			
	0.20000	0.028041826	
	0.10000	0.013530389	1.051376949
	0.05000	0.006650633	1.024639699
	0.02500	0.003297594	1.012077961
	0.01250	0.001641976	1.005980782
	0.00625	0.000819296	1.002976111
Heun:			
	0.20000	0.001473510	
	0.10000	0.000344261	2.097680438
	0.05000	0.000083263	2.047754831
	0.02500	0.000020478	2.023595860
	0.01250	0.000005078	2.011726711
	0.00625	0.000001264	2.005845470

(b)

	h	phi(h)	exp. Konvergenzordnung
Euler:			
	0.20000	0.007202744	
	0.10000	0.003488726	1.045846377
	0.05000	0.001719020	1.021113803
	0.02500	0.000853485	1.010149120
	0.01250	0.000425273	1.004977722
	0.00625	0.000212273	1.002465263
Heun:			
	0.20000	0.000578696	
	0.10000	0.000135200	2.097715195
	0.05000	0.000032676	2.048808768
	0.02500	0.000008032	2.024379016
	0.01250	0.000001991	2.012181621
	0.00625	0.000000496	2.006088652

- Die Steigung der Geraden (in den Abbildungen des Konvergenzfehlers) entspricht der Konvergenzordnung des jeweiligen Verfahrens für diese spezielle AWA (Euler ≈ 1, Heun ≈ 2).
- Euler: Halbierung der Schrittweite führt zur Halbierung des Konvergenzfehlers
  Heun: Halbierung der Schrittweite führt zur Viertelung des Konvergenzfehlers
- Euler $\phi(h) \approx 10^{-n}$ $\Rightarrow$ Heun $\phi(h) \approx 10^{-2n}$