

Aufgaben zur Vorlesung

Numerik II

Wintersemester 2012/13

Übungsblatt 5

W.-J. Beyn

D. Otten

Abgabe: Mittwoch, 14.11.2012, vor Beginn der Übung

Übung: Mi. 12:15–13:45, V5-148

Aufgabe 13: [Lösbarkeit impliziter Runge-Kutta-Verfahren]

Geben Sie Schrittweiten $h_0 > 0$ an, so dass die in der Vorlesung angegebenen impliziten Runge-Kutta-Verfahren der Stufe $m = 1$ (Ordnung 2) und $m = 2$ (Ordnung 4) für die Anfangswertaufgabe

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(2u_1) - u_2 \\ \cos(2u_2) - u_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \end{pmatrix},$$

für alle $0 < h \leq h_0$ durchführbar, d.h. die impliziten Gleichungen eindeutig auflösbar sind.

(6 Punkte)

Aufgabe 14: [Runge-Kutta-Verfahren]

Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$u' = f(t, u), \quad u(0) = u^0.$$

Schreiben Sie ein Programm, das folgendes leistet:

Nach Eingabe der Raumdimension d , der Schrittweite h , der Stufenzahl $m \in \mathbb{N}$ und eines m -stufigen Runge-Kutta-Tableaus

0	0	0
α_2	β_{21}	\ddots	\ddots	\vdots
\vdots	\vdots	\ddots	\ddots	\vdots
α_m	β_{m1}	...	$\beta_{m,m-1}$	0
	γ_1	...	γ_{m-1}	γ_m

soll das Programm das zugehörige Runge-Kutta-Verfahren auf $[0, 7]$ durchführen.

Verwenden Sie Ihr Programm zur numerischen Lösung der Beispiele a) und b) mit den angegebenen Runge-Kutta-Verfahren und der Schrittweite $h = 0.1$.

Zeichnen Sie für a) und b) jeweils ein aussagekräftiges Diagramm, das die exakte Lösung und alle numerischen Lösungen enthält!

a) $u' = u - 2 \sin t, \quad u(0) = 1,$

Exakte Lösung: $\bar{u}(t) = \cos t + \sin t$

b) $u' = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} u, \quad u(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$

Exakte Lösung: $\bar{u}(t) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -\exp(-t) + 6 \exp(-\frac{t}{2}) \\ 2 \exp(-t) + 3 \exp(-\frac{t}{2}) \end{pmatrix}.$

Runge-Kutta-Tableaus:

- $m = 1$

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

- $m = 2$

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

- $m = 4$

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

(6 Punkte)

Approximieren Sie jeweils numerisch die Konvergenzordnung

(2 Zusatzpunkte)

Aufgabe 15: [Koeffizienten im Runge-Kutta-Tableau]

Geben Sie ein Gleichungssystem für die Koeffizienten $\alpha_1, \alpha_2, \beta_{11}, \beta_{21}, \beta_{22}, \gamma_1, \gamma_2$ an, so dass für das zu dem Tableau

$$\begin{array}{c|cc} \alpha_1 & \beta_{11} & 0 \\ \alpha_2 & \beta_{21} & \beta_{22} \\ \hline & \gamma_1 & \gamma_2 \end{array}$$

gehörende halbimplizite Runge-Kutta-Verfahren Konsistenz der Ordnung 3 vorliegt. Berechnen Sie eine Lösung des Systems mit $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2}$.

Hinweis: Kürzen Sie Argumente wie $(t + \alpha_1 s, v + \beta_{11} s k_1)$, $(t + \alpha_2 s, v + s(\beta_{21} k_1 + \beta_{22} k_2))$ geeignet ab.

(6 Punkte)

Numerik II (WS 12/13)

Übungsblatt 05

Lösungen

Aufgabe 13:

$$(13.1) \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(2u_1) - u_2 \\ \cos(2u_2) - u_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \end{pmatrix}$$

Geben Sie jeweils ein $h_0 > 0$ an, so dass die impliziten RK-Verfahren der Stufe 1 (mit Konsistenzordnung 2) & Stufe 2 (mit Konsistenzordnung 4) aus der Vorlesung für (13.1) für jedes $0 < h \leq h_0$ durchführbar sind.

Lösung:

Zunächst sind die Verfahren gegeben durch die Tableaus

$$\begin{array}{c|c} & \frac{1}{2} \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array}$$

$m=1$

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{6}(3-\sqrt{3}) & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{6} \\ \hline \frac{1}{6}(3+\sqrt{3}) & \frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

$m=2$

Ziel: Anwendung von Satz 2.6. Wir überprüfen die Voraussetzungen: Zunächst stellen wir im Beweis von Satz 2.6 fest, dass die 2. Bedingung in (2.36) für autonome AWP'e weggelassen werden kann, d.h. im Falle $f(t,v) = f(v)$. Die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$f(v) = \begin{pmatrix} \sin(2v_1) - v_2 \\ \cos(2v_2) - v_1 \end{pmatrix}$$

Satz: Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ für $n \in \mathbb{N}$ einmal stetig differenzierbar auf \mathbb{R}^n , dann sind folgende Aussagen äquivalent:

①: $\|Df(v)\| \leq L \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$

②: $\|f(v) - f(w)\| \leq L \cdot \|v - w\| \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n$

für ein $L \geq 0$.

Wir zeigen, dass ① mit $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$ erfüllt ist:

$$Df(v) = \begin{pmatrix} 2\cos(2v_1) & -1 \\ -1 & -2\sin(2v_2) \end{pmatrix}$$

Maximum wird z.B. bei $v_1=0, v_2=\frac{\pi}{4}$ angenommen.

$$\Rightarrow \|Df(v)\|_\infty = \max \{ |2\cos(2v_1)| + |-1|, |-1| + |-2\sin(2v_2)| \} = 3 \quad \forall v \in \mathbb{R}^2$$

Satz $\Rightarrow \|f(v) - f(w)\|_\infty \leq 3 \cdot \|v - w\|_\infty \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^2$

Alternativ: Direkt lässt sich dies auch mittel Taylor theorem zeigen (da f stetig diffbar):

$$\begin{aligned} \|f(v) - f(w)\|_\infty &= \left\| \int_0^1 Df(w + t(v-w)) dt \cdot (v-w) \right\|_\infty \\ &\leq \int_0^1 \|Df(w + t(v-w))\|_\infty dt \cdot \|v-w\|_\infty \\ &\leq \sup_{v \in \mathbb{R}^2} \|Df(v)\|_\infty = 3 \\ &\leq 3 \cdot \|v-w\|_\infty \end{aligned}$$

$L=3$

Wähle $h_0 > 0$ derart, dass

$$q(h_0) = h_0 \cdot L \cdot \|\beta\|_\infty < 1$$

gilt (vgl. (2.36)), d.h.

$$h_0 < \frac{1}{L \cdot \|\beta\|_\infty} = \begin{cases} \frac{1}{3 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} = 0.\overline{66} & , u=1 \\ \frac{1}{3 \cdot \frac{3+\sqrt{3}}{6}} = \frac{2}{3+\sqrt{3}} \approx 0.4226497 & , u=2 \end{cases} \quad (*)$$

denn:

$$\|\beta\|_\infty = \begin{cases} |\frac{1}{2}| = \frac{1}{2} & , u=1 \\ \max\{|\frac{1}{4}| + |\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}|, |\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}| + |\frac{1}{4}|\} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{3+\sqrt{3}}{6} & , u=2 \end{cases}$$

Nach Satz 2.6 sind die impliziten RK-Gleichungen (2.27) für jedes $t \in [t_0, t_E]$ ($-\infty < t_0 < t_E < +\infty$) für jedes $v = (v_1, v_2)^T \in \mathbb{R}^2$ und für jedes $0 < h \leq h_0$ mit $(*)$ eindeutig lösbar.

Aufgabe 14:

```

%% Aufgabenteil (a)
f = @(t,v) v-2*sin(t);
u_init=1;
t_init=0;
t_end=7;
h=0.1;
t_fine=t_init:h/100:t_end;
u_bar = @(t) cos(t)+sin(t);

%% Runge-Kutta-Tableau (m=1) Explizites Euler-Verfahren
alpha=[0];
beta=[0];
gamma=[1];

[tn_euler,un_euler]=rk_explicit(f,u_init,t_init,t_end,h,alpha,beta,gamma);

%% Runge-Kutta-Tableau (m=2) Heun-Verfahren
alpha=[0;1/2];
beta=[0 0; 1/2 0];
gamma=[0 1];

[tn_heun,un_heun]=rk_explicit(f,u_init,t_init,t_end,h,alpha,beta,gamma);

%% Runge-Kutta-Tableau (m=4) Klassisches Runge-Kutta-Verfahren
alpha=[0 1/2 1/2 1];
beta=[0 0 0 0;1/2 0 0 0;0 1/2 0 0;0 0 1 0];
gamma=[1/6 1/3 1/3 1/6];

[tn_rkclassic,un_rkclassic]=rk_explicit(f,u_init,t_init,t_end,h,alpha,beta,gamma);

%% Graphische Ausgabe
figure;
hold on;
plot(tn_euler,un_euler,'b');
plot(tn_heun,un_heun,'r');
plot(tn_rkclassic,un_rkclassic,'g');
plot(t_fine,u_bar(t_fine),'k');
legend('explicit Euler','Heun','classical RK','exact','Location','Best');
hold off

%% Aufgabenteil (b)
f = @(t,v) 1/10*[-6 2;2 -9]*v;
u_init=[1;1];
t_init=0;
t_end=7;
h=0.1;
t_fine=t_init:h/100:t_end;
u_bar = @(t) 1/5*[-exp(-t)+6*exp(-t/2);2*exp(-t)+3*exp(-t/2)];

%% Runge-Kutta-Tableau (m=1) Explizites Euler-Verfahren
alpha=[0];
beta=[0];
gamma=[1];

[tn_euler,un_euler]=rk_explicit(f,u_init,t_init,t_end,h,alpha,beta,gamma);

```

```
%% Runge-Kutta-Tableau (m=2) Heun-Verfahren
alpha=[0;1/2];
beta=[0 0; 1/2 0];
gamma=[0 1];

[tn_heun,un_heun]=rk_explicit(f,u_init,t_init,t_end,h,alpha,beta,gamma);

%% Runge-Kutta-Tableau (m=4) Klassisches Runge-Kutta-Verfahren
alpha=[0 1/2 1/2 1];
beta=[0 0 0 0;1/2 0 0 0;0 1/2 0 0;0 0 1 0];
gamma=[1/6 1/3 1/3 1/6];

[tn_rkclassic,un_rkclassic]=rk_explicit(f,u_init,t_init,t_end,h,alpha,beta,
gamma);

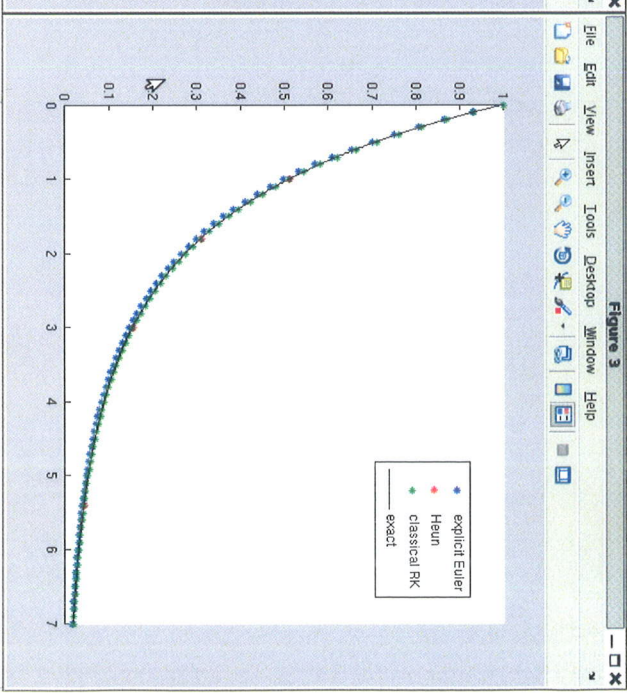
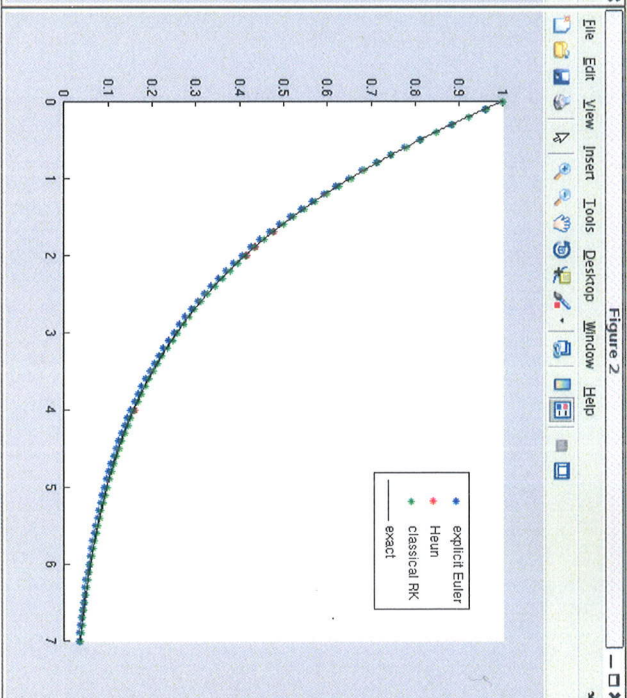
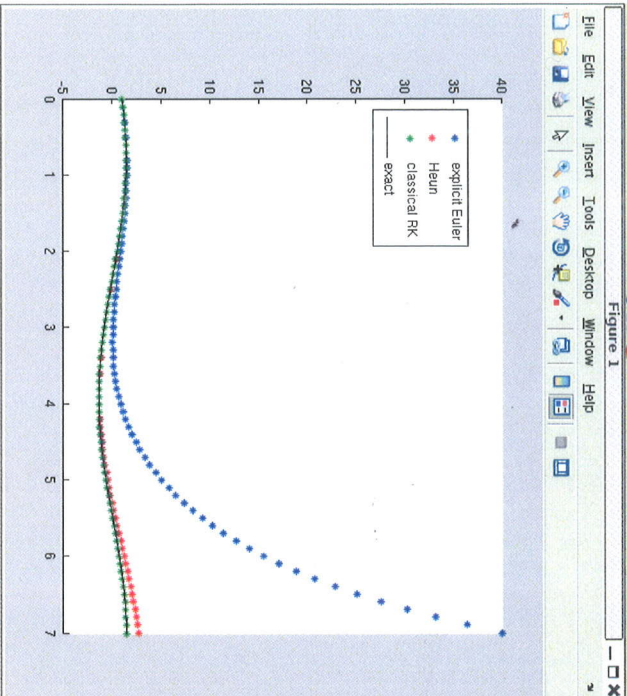
%% Graphische Ausgabe
u_exact_sol=u_bar(t_fine);
space_dim=length(u_init);
for i=1:space_dim
    figure;
    hold on;
    plot(tn_euler,un_euler(i,:), 'b');
    plot(tn_heun,un_heun(i,:), 'r');
    plot(tn_rkclassic,un_rkclassic(i,:), 'g');
    plot(t_fine,u_exact_sol(i,:), 'k');
    legend('explicit Euler', 'Heun', 'classical RK', 'exact', 'Location', 'Best');
    hold off
end
```

```
function [tn,un] = rk_explicit(f,u_init,t_init,t_end,h,alpha,beta,gamma)
%RK_EXPLICIT loest Anfangswertprobleme der Form
%      u'(t) = f(t,u(t)), u(t_init) = u_init
%      mit expliziten Runge-Kutta Verfahren (alpha,beta,gamma)
%      zur konstanten Zeitschrittweite h auf dem endlichen
%      Zeitintervall [t_init,t_end].

%% Initialisierung
m=length(gamma);           % Stufe des RK-Verfahrens
tn=t_init:h:t_end;        % diskretes Zeitintervall
time_steps=length(tn);    % Anzahl der Zeitschritte
space_dim=length(u_init); % Dimension der DGL, Raumdimension
un=zeros(space_dim,time_steps); % Speicherreservierung fuer RK-Iteration
un(:,1)=u_init;           % Initialisierung der Anfangsdaten
k=zeros(space_dim,m);     % Speicherreservierung der k_i's

%% Explizites Runge-Kutta-Verfahren
for j=2:time_steps
    % Berechnung der k_i's
    for i=1:m
        temp_k=zeros(space_dim,1);
        for l=1:i-1
            temp_k=temp_k+beta(i,l)*k(:,l);
        end
        k(:,i)=f(tn(j-1)+alpha(i)*h,un(:,j-1)+h*temp_k);
    end

    % Berechnung der u^j's
    temp_phi=zeros(space_dim,1);
    for i=1:m
        temp_phi=temp_phi+gamma(i)*k(:,i);
    end
    un(:,j)=un(:,j-1)+h*temp_phi;
end
end
```

Rk_explicit.m (MATLAB Funktion)
 l0est_Anfangswertprobleme_dier_Form
 rk_explicitf_u_lint_t_lint_tlend...

```

Command History
cd /usr/bin/
aufgabe09
edit aufgabe09.m
clear all
clc
% -- 19.11.2012 10:06:41 --%
cd Desktop/
cd Loesungen/
cd uebung05/
aufgabe14
edit eoc.m
aufgabe14
  
```

Zusatz (von
Aufgabe 14)

```

%% Aufgabenteil (a)
f = @(t,v) v-2*sin(t);
u_init=1;
t_init=0;
t_end=7;
h=1/2;
q=1/2;
h_grid=h.*q.^(0:8);
time_stepsizes = length(h_grid);
u_bar = @(t) cos(t)+sin(t);

t_grid=cell(1,time_stepsizes);
un_euler=cell(1,time_stepsizes);
un_heun=cell(1,time_stepsizes);
un_rkclassic=cell(1,time_stepsizes);

for n=1:time_stepsizes
    t_grid{n} = t_init:h_grid(n):t_end;
    un_euler{n} = zeros(length(u_init),length(t_grid{n}));
    un_heun{n} = zeros(length(u_init),length(t_grid{n}));
    un_rkclassic{n} = zeros(length(u_init),length(t_grid{n}));
    un_euler{n}(:,1) = u_init;
    un_heun{n}(:,1) = u_init;
    un_rkclassic{n}(:,1) = u_init;
end

%% Runge-Kutta-Tableau (m=1) Explizites Euler-Verfahren
alpha=[0];
beta=[0];
gamma=[1];

for n=1:time_stepsizes
    [tn_euler,un_euler{n}]=rk_explicit(f,u_init,t_init,t_end,h_grid(n),alpha,
beta,gamma);
end

%% Runge-Kutta-Tableau (m=2) Heun-Verfahren
alpha=[0;1/2];
beta=[0 0; 1/2 0];
gamma=[0 1];

for n=1:time_stepsizes
    [tn_heun,un_heun{n}]=rk_explicit(f,u_init,t_init,t_end,h_grid(n),alpha,beta,
gamma);
end

%% Runge-Kutta-Tableau (m=4) Klassisches Runge-Kutta-Verfahren
alpha=[0 1/2 1/2 1];
beta=[0 0 0 0;1/2 0 0 0;0 1/2 0 0;0 0 1 0];
gamma=[1/6 1/3 1/3 1/6];

for n=1:time_stepsizes
    [tn_rkclassic,un_rkclassic{n}]=rk_explicit(f,u_init,t_init,t_end,h_grid(n),
alpha,beta,gamma);
end

```



```

%% Experimentelle Konvergenzordnung (EOG)
% Moeglichkeit 1: (benoetigt 3 numerische Loesungen)
err_euler = zeros(time_stepsizes-1,1);
err_heun = zeros(time_stepsizes-1,1);
err_rkclassic = zeros(time_stepsizes-1,1);

for n=1:time_stepsizes-1
    err_euler(n) = norm(un_euler{n}(:,end)-un_euler{n+1}(:,end));
    err_heun(n) = norm(un_heun{n}(:,end)-un_heun{n+1}(:,end));
    err_rkclassic(n) = norm(un_rkclassic{n}(:,end)-un_rkclassic{n+1}(:,end));
end

EOC_euler = zeros(time_stepsizes-2,1);
EOC_heun = zeros(time_stepsizes-2,1);
EOC_rkclassic = zeros(time_stepsizes-2,1);

for n=1:time_stepsizes-2
    EOC_euler(n) = log(err_euler(n+1)/err_euler(n))/log(q);
    EOC_heun(n) = log(err_heun(n+1)/err_heun(n))/log(q);
    EOC_rkclassic(n) = log(err_rkclassic(n+1)/err_rkclassic(n))/log(q);
end

% Moeglichkeit 2: (benoetigt exakte Loesung)
u_sol = cell(1,time_stepsizes);
err_bar_euler = zeros(time_stepsizes,1);
err_bar_heun = zeros(time_stepsizes,1);
err_bar_rkclassic = zeros(time_stepsizes,1);

for n=1:time_stepsizes
    u_sol{n}=u_bar(t_grid{n});
    err_bar_euler(n) = norm(u_sol{n}(:,end)-un_euler{n}(:,end));
    err_bar_heun(n) = norm(u_sol{n}(:,end)-un_heun{n}(:,end));
    err_bar_rkclassic(n) = norm(u_sol{n}(:,end)-un_rkclassic{n}(:,end));
end

EOC_bar_euler = zeros(time_stepsizes-1,1);
EOC_bar_heun = zeros(time_stepsizes-1,1);
EOC_bar_rkclassic = zeros(time_stepsizes-1,1);

for n=1:time_stepsizes-1
    EOC_bar_euler(n) = log(err_bar_euler(n)/err_bar_euler(n+1)) / log(h_grid(n) /
/h_grid(n+1));
    EOC_bar_heun(n) = log(err_bar_heun(n)/err_bar_heun(n+1)) / log(h_grid(n) /
/h_grid(n+1));
    EOC_bar_rkclassic(n) = log(err_bar_rkclassic(n)/err_bar_rkclassic(n+1)) / log
(h_grid(n)/h_grid(n+1));
end

%% Output
fprintf('\n Experimentelle Konvergenzordnungen (EOG) mittels drei numerischer
Loesungen\n');
fprintf('  h      Expl. Euler Verfahren      Heun Verfahren      Klass. RK-
Verfahren\n');
fprintf('-----\n');
fprintf('%6.5f\n',h_grid(1));
fprintf('%6.5f\n',h_grid(2));

```



```
for n=3:time_stepsizes
    fprintf('%6.5f      %10.9f      %10.9f      %10.9f \n',h_grid(n),
EOC_euler(n-2),EOC_heun(n-2),EOC_rkclassic(n-2));
end
fprintf('\n');
fprintf('\n Experimentelle Konvergenzordnungen (EOC) mittels exakter
Loesung\n');
fprintf('  h      Expl. Euler,Verfahren      Heun Verfahren      Klass. RK-
Verfahren\n');
fprintf('-----\n');
fprintf('%6.5f\n',h_grid(1));
for n=2:time_stepsizes
    fprintf('%6.5f      %10.9f      %10.9f      %10.9f \n',h_grid(n),
EOC_bar_euler(n-1),EOC_bar_heun(n-1),EOC_bar_rkclassic(n-1));
end
fprintf('\n');
fprintf('\n Konvergenzfehler mittels exakter Loesung\n');
fprintf('  h      Expl. Euler Verfahren      Heun Verfahren      Klass. RK-
Verfahren\n');
fprintf('-----\n');
for n=1:time_stepsizes
    fprintf('%6.5f      %10.9e      %10.9e      %10.9e \n',h_grid(n),
err_bar_euler(n),err_bar_heun(n),err_bar_rkclassic(n));
end
```

```
%% Aufgabenteil (b)
f = @(t,v) 1/10*[-6 2;2 -9]*v;
u_init=[1;1];
t_init=0;
t_end=7;
h=1/2;
q=1/2;
h_grid=h.*q.^(0:8);
time_stepsizes = length(h_grid);
u_bar = @(t) 1/5*[-exp(-t)+6*exp(-t/2);2*exp(-t)+3*exp(-t/2)];

t_grid=cell(1,time_stepsizes);
un_euler=cell(1,time_stepsizes);
un_heun=cell(1,time_stepsizes);
un_rkclassic=cell(1,time_stepsizes);

for n=1:time_stepsizes
    t_grid{n} = t_init:h_grid(n):t_end;
    un_euler{n} = zeros(length(u_init),length(t_grid{n}));
    un_heun{n} = zeros(length(u_init),length(t_grid{n}));
    un_rkclassic{n} = zeros(length(u_init),length(t_grid{n}));
    un_euler{n}(:,1) = u_init;
    un_heun{n}(:,1) = u_init;
    un_rkclassic{n}(:,1) = u_init;
end

%% Runge-Kutta-Tableau (m=1) Explizites Euler-Verfahren
alpha=[0];
beta=[0];
gamma=[1];

for n=1:time_stepsizes
    [tn_euler,un_euler{n}]=rk_explicit(f,u_init,t_init,t_end,h_grid(n),alpha,
beta,gamma);
end

%% Runge-Kutta-Tableau (m=2) Heun-Verfahren
alpha=[0;1/2];
beta=[0 0; 1/2 0];
gamma=[0 1];

for n=1:time_stepsizes
    [tn_heun,un_heun{n}]=rk_explicit(f,u_init,t_init,t_end,h_grid(n),alpha,beta,
gamma);
end

%% Runge-Kutta-Tableau (m=4) Klassisches Runge-Kutta-Verfahren
alpha=[0 1/2 1/2 1];
beta=[0 0 0 0;1/2 0 0 0;0 1/2 0 0;0 0 1 0];
gamma=[1/6 1/3 1/3 1/6];

for n=1:time_stepsizes
    [tn_rkclassic,un_rkclassic{n}]=rk_explicit(f,u_init,t_init,t_end,h_grid(n),
alpha,beta,gamma);
end
```

```

%% Experimentelle Konvergenzordnung (EOC)
% Moeglichkeit 1: (benoetigt 3 numerische Loesungen)
err_euler = zeros(time_stepsizes-1,1);
err_heun = zeros(time_stepsizes-1,1);
err_rkclassic = zeros(time_stepsizes-1,1);

for n=1:time_stepsizes-1
    err_euler(n) = norm(un_euler{n}(:,end)-un_euler{n+1}(:,end));
    err_heun(n) = norm(un_heun{n}(:,end)-un_heun{n+1}(:,end));
    err_rkclassic(n) = norm(un_rkclassic{n}(:,end)-un_rkclassic{n+1}(:,end));
end

EOC_euler = zeros(time_stepsizes-2,1);
EOC_heun = zeros(time_stepsizes-2,1);
EOC_rkclassic = zeros(time_stepsizes-2,1);

for n=1:time_stepsizes-2
    EOC_euler(n) = log(err_euler(n+1)/err_euler(n))/log(q);
    EOC_heun(n) = log(err_heun(n+1)/err_heun(n))/log(q);
    EOC_rkclassic(n) = log(err_rkclassic(n+1)/err_rkclassic(n))/log(q);
end

% Moeglichkeit 2: (benoetigt exakte Loesung)
u_sol = cell(1,time_stepsizes);
err_bar_euler = zeros(time_stepsizes,1);
err_bar_heun = zeros(time_stepsizes,1);
err_bar_rkclassic = zeros(time_stepsizes,1);

for n=1:time_stepsizes
    u_sol{n}=u_bar(t_grid{n});
    err_bar_euler(n) = norm(u_sol{n}(:,end)-un_euler{n}(:,end));
    err_bar_heun(n) = norm(u_sol{n}(:,end)-un_heun{n}(:,end));
    err_bar_rkclassic(n) = norm(u_sol{n}(:,end)-un_rkclassic{n}(:,end));
end

EOC_bar_euler = zeros(time_stepsizes-1,1);
EOC_bar_heun = zeros(time_stepsizes-1,1);
EOC_bar_rkclassic = zeros(time_stepsizes-1,1);

for n=1:time_stepsizes-1
    EOC_bar_euler(n) = log(err_bar_euler(n)/err_bar_euler(n+1)) / log(h_grid(n) / h_grid(n+1));
    EOC_bar_heun(n) = log(err_bar_heun(n)/err_bar_heun(n+1)) / log(h_grid(n) / h_grid(n+1));
    EOC_bar_rkclassic(n) = log(err_bar_rkclassic(n)/err_bar_rkclassic(n+1)) / log(h_grid(n)/h_grid(n+1));
end

%% Output
fprintf('\n Experimentelle Konvergenzordnungen (EOC) mittels drei numerischer Loesungen\n');
fprintf('  h      Expl. Euler Verfahren      Heun Verfahren      Klass. RK-Verfahren\n');
fprintf('-----\n');
fprintf('%6.5f\n',h_grid(1));
fprintf('%6.5f\n',h_grid(2));

```



```
for n=3:time_stepsizes
    fprintf('%6.5f      %10.9f      %10.9f      %10.9f \n',h_grid(n),
EOC_euler(n-2),EOC_heun(n-2),EOC_rkclassic(n-2));
end
fprintf('\n');
fprintf('\n Experimentelle Konvergenzordnungen (EOC) mittels exakter
Loesung\n');
fprintf('  h      Expl. Euler,Verfahren      Heun Verfahren      Klass. RK-
Verfahren\n');
fprintf('-----\n');
fprintf('%6.5f\n',h_grid(1));
for n=2:time_stepsizes
    fprintf('%6.5f      %10.9f      %10.9f      %10.9f \n',h_grid(n),
EOC_bar_euler(n-1),EOC_bar_heun(n-1),EOC_bar_rkclassic(n-1));
end
fprintf('\n');
fprintf('\n Konvergenzfehler mittels exakter Loesung\n');
fprintf('  h      Expl. Euler Verfahren      Heun Verfahren      Klass. RK-
Verfahren\n');
fprintf('-----\n');
for n=1:time_stepsizes
    fprintf('%6.5f      %10.9e      %10.9e      %10.9e \n',h_grid(n),
err_bar_euler(n),err_bar_heun(n),err_bar_rkclassic(n));
end
```

(a):

Experimentelle Konvergenzordnungen (EOC) mittels drei numerischer Loesungen

h	Expl. Euler Verfahren	Heun Verfahren	Klass. RK-Verfahren
0.50000			
0.25000			
0.12500	-1.967918575	1.515972517	3.763668129
0.06250	-0.045776969	1.811850231	3.884949065
0.03125	0.495136783	1.924385455	3.943245376
0.01562	0.747982498	1.967624287	3.971823424
0.00781	0.873683554	1.985286685	3.985964241
0.00391	0.936716738	1.993027567	3.992991554
0.00195	0.968321235	1.996611854	3.996731294

Experimentelle Konvergenzordnungen (EOC) mittels exakter Loesung

h	Expl. Euler Verfahren	Heun Verfahren	Klass. RK-Verfahren
0.50000			
0.25000	0.096605558	1.615486318	3.772474804
0.12500	0.455864235	1.845554943	3.888934128
0.06250	0.698024569	1.936839212	3.945142602
0.03125	0.840385164	1.972660177	3.972748847
0.01562	0.917865922	1.987491423	3.986422086
0.00781	0.958328107	1.994049385	3.993238294
0.00391	0.979009807	1.997102322	3.996925953
0.00195	0.989465954	1.998570789	3.999842355

Konvergenzfehler mittels exakter Loesung

h	Expl. Euler Verfahren	Heun Verfahren	Klass. RK-Verfahren
0.50000	6.502228222e+01	2.177347734e+01	4.358002566e-01
0.25000	6.081084499e+01	7.105881396e+00	3.189035896e-02
0.12500	4.433556318e+01	1.977199800e+00	2.152650795e-03
0.06250	2.732913566e+01	5.164209571e-01	1.397549900e-04
0.03125	1.526317045e+01	1.315751802e-01	8.901245009e-06
0.01562	8.078664628e+00	3.318023359e-02	5.615884044e-07
0.00781	4.157708848e+00	8.329343284e-03	3.526416670e-08
0.00391	2.109321386e+00	2.086522431e-03	2.208711658e-09
0.00195	1.062389633e+00	5.221476191e-04	1.380595638e-10

(b):

Experimentelle Konvergenzordnungen (EOC) mittels drei numerischer Loesungen

h	Expl. Euler Verfahren	Heun Verfahren	Klass. RK-Verfahren
0.50000			
0.25000			
0.12500	0.916233305	2.189515453	4.175792423
0.06250	0.965486486	2.086328817	4.086211262
0.03125	0.984298485	2.041362726	4.042773061
0.01562	0.992507945	2.020258378	4.021309532
0.00781	0.996340190	2.010026491	4.010633333
0.00391	0.998191235	2.004987934	4.005172582
0.00195	0.999100852	2.002487682	3.994874191

Experimentelle Konvergenzordnungen (EOC) mittels exakter Loesung

h	Expl. Euler Verfahren	Heun Verfahren	Klass. RK-Verfahren
0.50000			
0.25000	0.947747346	2.162809315	4.170468776
0.12500	0.977717903	2.074078958	4.083520957
0.06250	0.989696905	2.035471758	4.041416267
0.03125	0.995044513	2.017368458	4.020628349
0.01562	0.997569702	2.008595123	4.010301791
0.00781	0.998796522	2.004275613	4.005302201
0.00391	0.999401156	2.002132358	4.007253050
0.00195	0.999701299	2.001064819	4.205131815

Konvergenzfehler mittels exakter Loesung

h	Expl. Euler Verfahren	Heun Verfahren	Klass. RK-Verfahren
0.50000	1.661311367e-02	1.833074367e-03	6.123757253e-06
0.25000	8.612924839e-03	4.093639604e-04	3.400805305e-07
0.12500	4.373491041e-03	9.721865888e-05	2.005947089e-08
0.06250	2.202418195e-03	2.371436889e-05	1.218237467e-09
0.03125	1.104998124e-03	5.857646419e-06	7.505890387e-11
0.01562	5.534305609e-04	1.455713039e-06	4.657802688e-12
0.00781	2.769462091e-04	3.628513080e-07	2.900447328e-13
0.00391	1.385305949e-04	9.057884905e-08	1.803688826e-14
0.00195	6.927963990e-05	2.262800490e-08	9.778917965e-16

Aufgabe 15:

Geben Sie ein Gleichungssystem für die Koeffizienten $\alpha_1, \alpha_2, \beta_{11}, \beta_{21}, \beta_{22}, \gamma_1, \gamma_2$ an, so dass für das zum Tableau

$$\begin{array}{c|cc} \alpha_1 & \beta_{11} & 0 \\ \alpha_2 & \beta_{21} & \beta_{22} \\ \hline & \gamma_1 & \gamma_2 \end{array}, \quad m=2$$

gehörende halbimplizite RK-Verfahren Konsistenz der Ordnung 3 vorliegt. Berechnen Sie eine Lösung des Systems für $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2}$.

Lösung:

- Verfahrensformulation:

$$\varphi(t, v, s) = \gamma_1 k_1(t, v, s) + \gamma_2 k_2(t, v, s)$$

mit

$$k_1(t, v, s) = f(t + \alpha_1 s, v + s \beta_{11} k_1(t, v, s))$$

$$k_2(t, v, s) = f(t + \alpha_2 s, v + s(\beta_{21} k_1(t, v, s) + \beta_{22} k_2(t, v, s)))$$

wobei $f \in C^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ angenommen wird.

- Konsistenz der Ordnung 3 liegt vor, falls (siehe Satz 2.2) $f \in C^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und

$$(15.1_i) \quad \left(\frac{d}{dt}\right)^i [f(t, \bar{u}(t))] = (i+1) \left[\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^i \varphi\right](t, \bar{u}(t), 0), \quad i=0, 1, 2.$$

- Ableitungen der k_i 's:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} k_1(t, v, s) &= \frac{\partial}{\partial s} [f(t + \alpha_1 s, v + s \beta_{11} k_1(t, v, s))] \\ &= f_t(t + \alpha_1 s, v + s \beta_{11} k_1(t, v, s)) \cdot \alpha_1 \\ &\quad + f_v(t + \alpha_1 s, v + s \beta_{11} k_1(t, v, s)) \cdot (\beta_{11} k_1(t, v, s) + s \beta_{11} \frac{\partial}{\partial s} k_1(t, v, s)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} k_2(t, v, s) &= \frac{\partial}{\partial s} [f(t + \alpha_2 s, v + s(\beta_{21} k_1(t, v, s) + \beta_{22} k_2(t, v, s)))] \\ &= f_t(t + \alpha_2 s, v + s(\beta_{21} k_1(t, v, s) + \beta_{22} k_2(t, v, s))) \cdot \alpha_2 \\ &\quad + f_v(t + \alpha_2 s, v + s(\beta_{21} k_1(t, v, s) + \beta_{22} k_2(t, v, s))) \cdot \\ &\quad \cdot (\beta_{21} k_1(t, v, s) + \beta_{22} k_2(t, v, s) + s \beta_{21} \frac{\partial}{\partial s} k_1(t, v, s) + s \beta_{22} \frac{\partial}{\partial s} k_2(t, v, s)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 k_1(t, v, s) &= f_{tt}(t + \alpha_1 s, v + s \beta_{11} k_1(t, v, s)) \cdot \alpha_1^2 \\ &\quad + f_{tv}(t + \alpha_1 s, v + s \beta_{11} k_1(t, v, s)) \cdot \alpha_1 \cdot (\beta_{11} k_1(t, v, s) + s \beta_{11} \frac{\partial}{\partial s} k_1(t, v, s)) \\ &\quad + f_{vt}(t + \alpha_1 s, v + s \beta_{11} k_1(t, v, s)) \cdot \alpha_1 \cdot (\beta_{11} k_1(t, v, s) + s \beta_{11} \frac{\partial}{\partial s} k_1(t, v, s)) \\ &\quad + f_{vv}(t + \alpha_1 s, v + s \beta_{11} k_1(t, v, s)) \cdot (\beta_{11} k_1(t, v, s) + s \beta_{11} \frac{\partial}{\partial s} k_1(t, v, s))^2 \\ &\quad + f_v(t + \alpha_1 s, v + s \beta_{11} k_1(t, v, s)) \cdot (\beta_{11} \frac{\partial}{\partial s} k_1(t, v, s) + \beta_{11} \frac{\partial}{\partial s} k_1(t, v, s) \\ &\quad \quad + s \beta_{11} \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 k_1(t, v, s)). \end{aligned}$$

Achtung: Dies ist eine Multilinearform, d.h. diese Zeile ist zu verstehen als

$$\begin{aligned} f_{vv}(t + \alpha_1 s, v + s \beta_{11} k_1(t, v, s)) & \left[\beta_{11} k_1(t, v, s) + s \beta_{11} \frac{\partial}{\partial s} k_1(t, v, s), \beta_{11} k_1(t, v, s) + s \beta_{11} \frac{\partial}{\partial s} k_1(t, v, s) \right] \\ & =: (\beta_{11} k_1(t, v, s) + s \beta_{11} \frac{\partial}{\partial s} k_1(t, v, s))^2 \text{ („Must Notation“)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 k_2(t, v, s) &= f_{++}(t + \alpha_2 s, v + s(\beta_{21} k_1(t, v, s) + \beta_{22} k_2(t, v, s))) \cdot \alpha_2^2 \\
 &+ f_{+v}(t + \alpha_2 s, v + s(\beta_{21} k_1(t, v, s) + \beta_{22} k_2(t, v, s))) \cdot \alpha_2 \cdot \\
 &\quad \cdot (\beta_{21} k_1(t, v, s) + \beta_{22} k_2(t, v, s) + s \beta_{21} \frac{\partial}{\partial s} k_1(t, v, s) + s \beta_{22} \frac{\partial}{\partial s} k_2(t, v, s)) \\
 &+ f_{v+}(t + \alpha_2 s, v + s(\beta_{21} k_1(t, v, s) + \beta_{22} k_2(t, v, s))) \cdot \alpha_2 \cdot \\
 &\quad \cdot (\beta_{21} k_1(t, v, s) + \beta_{22} k_2(t, v, s) + s \beta_{21} \frac{\partial}{\partial s} k_1(t, v, s) + s \beta_{22} \frac{\partial}{\partial s} k_2(t, v, s)) \\
 &+ f_{vv}(t + \alpha_2 s, v + s(\beta_{21} k_1(t, v, s) + \beta_{22} k_2(t, v, s))) \\
 &\quad \cdot (\beta_{21} k_1(t, v, s) + \beta_{22} k_2(t, v, s) + s \beta_{21} \frac{\partial}{\partial s} k_1(t, v, s) + s \beta_{22} \frac{\partial}{\partial s} k_2(t, v, s))^2 \\
 &+ f_v(t + \alpha_2 s, v + s(\beta_{21} k_1(t, v, s) + \beta_{22} k_2(t, v, s))) \\
 &\quad \cdot (\beta_{21} \frac{\partial}{\partial s} k_1(t, v, s) + \beta_{22} \frac{\partial}{\partial s} k_2(t, v, s) + \beta_{21} \frac{\partial}{\partial s} k_1(t, v, s) + \beta_{22} \frac{\partial}{\partial s} k_2(t, v, s)) \\
 &\quad + s \beta_{21} \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 k_1(t, v, s) + s \beta_{22} \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 k_2(t, v, s)
 \end{aligned}$$

Multilinearform
(siehe vorne) →

- Auswerten der k_i 's und deren Ableitungen in $(t, v, s) = (t, \bar{u}(t), 0)$: $k_i(t, \bar{u}(t), 0) = f(t, \bar{u}(t))$

$$\left[\frac{\partial}{\partial s} k_1\right](t, \bar{u}(t), 0) = f_+(t, \bar{u}(t)) \cdot \alpha_1 + f_v(t, \bar{u}(t)) \cdot \beta_{11} f(t, \bar{u}(t))$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial s} k_2\right](t, \bar{u}(t), 0) = f_+(t, \bar{u}(t)) \cdot \alpha_2 + f_v(t, \bar{u}(t)) \cdot (\beta_{21} + \beta_{22}) f(t, \bar{u}(t))$$

$$\begin{aligned}
 \left[\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 k_1\right](t, \bar{u}(t), 0) &= f_{++}(t, \bar{u}(t)) \cdot \alpha_1^2 + f_{+v}(t, \bar{u}(t)) \cdot \alpha_1 \cdot \beta_{11} \cdot f(t, \bar{u}(t)) \\
 &+ f_{v+}(t, \bar{u}(t)) \cdot \alpha_1 \cdot \beta_{11} \cdot f(t, \bar{u}(t)) \\
 &+ f_{vv}(t, \bar{u}(t)) \cdot (\beta_{11} \cdot f(t, \bar{u}(t)))^2 \\
 &+ f_v(t, \bar{u}(t)) \cdot 2\beta_{11} \cdot (f_+(t, \bar{u}(t)) \cdot \alpha_1 + f_v(t, \bar{u}(t)) \cdot \beta_{11} \cdot f(t, \bar{u}(t)))
 \end{aligned}$$

Multilinearform
(siehe vorne) →

$$\begin{aligned}
 &= f_{++}(t, \bar{u}(t)) \cdot \alpha_1^2 \\
 &+ f_{+v}(t, \bar{u}(t)) \cdot f(t, \bar{u}(t)) \cdot 2 \cdot \alpha_1 \cdot \beta_{11} \\
 &+ f_{vv}(t, \bar{u}(t)) \cdot (\beta_{11} \cdot f(t, \bar{u}(t)))^2 \\
 &+ f_v(t, \bar{u}(t)) \cdot f_+(t, \bar{u}(t)) \cdot 2 \cdot \alpha_1 \cdot \beta_{11} \\
 &+ f_v(t, \bar{u}(t)) \cdot f_v(t, \bar{u}(t)) \cdot f(t, \bar{u}(t)) \cdot 2 \cdot \beta_{11}^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left[\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 k_2\right](t, \bar{u}(t), 0) &= f_{++}(t, \bar{u}(t)) \cdot \alpha_2^2 + f_{+v}(t, \bar{u}(t)) \cdot \alpha_2 \cdot (\beta_{21} + \beta_{22}) \cdot f(t, \bar{u}(t)) \\
 &+ f_{v+}(t, \bar{u}(t)) \cdot \alpha_2 \cdot (\beta_{21} + \beta_{22}) \cdot f(t, \bar{u}(t)) \\
 &+ f_{vv}(t, \bar{u}(t)) \cdot [(\beta_{21} + \beta_{22}) f(t, \bar{u}(t))]^2 \\
 &+ f_v(t, \bar{u}(t)) \cdot [2\beta_{21} \cdot (f_+(t, \bar{u}(t)) \cdot \alpha_1 + f_v(t, \bar{u}(t)) \cdot \beta_{11} f(t, \bar{u}(t))) \\
 &\quad + 2\beta_{22} \cdot (f_+(t, \bar{u}(t)) \cdot \alpha_2 + f_v(t, \bar{u}(t)) \cdot (\beta_{21} + \beta_{22}) f(t, \bar{u}(t)))]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= f_{++}(t, \bar{u}(t)) \cdot \alpha_2^2 \\
 &+ f_{+v}(t, \bar{u}(t)) \cdot f(t, \bar{u}(t)) \cdot 2 \cdot \alpha_2 \cdot (\beta_{21} + \beta_{22}) \\
 &+ f_{vv}(t, \bar{u}(t)) \cdot ((\beta_{21} + \beta_{22}) f(t, \bar{u}(t)))^2 \\
 &+ f_v(t, \bar{u}(t)) \cdot f_+(t, \bar{u}(t)) \cdot (2 \alpha_1 \beta_{21} + 2 \alpha_2 \beta_{22}) \\
 &+ f_v(t, \bar{u}(t)) \cdot f_v(t, \bar{u}(t)) \cdot f(t, \bar{u}(t)) \cdot (2 \beta_{11} \beta_{21} + 2 \beta_{22} (\beta_{21} + \beta_{22}))
 \end{aligned}$$

Multilinearform
(siehe vorne) →

• $i=0$: (15.1₀) besagt

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^0 [f(t, \bar{u}(t))] = f(t, \bar{u}(t))$$

|| ?

$$(0+1) \cdot \left[\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^0 \varphi \right] (t, \bar{u}(t), 0) = \sum_{i=1}^2 \gamma_i \underbrace{\kappa_i(t, \bar{u}(t), 0)}_{= f(t, \bar{u}(t))} = (\gamma_1 + \gamma_2) \cdot f(t, \bar{u}(t))$$

$$(A1): \gamma_1 + \gamma_2 = 1$$

• $i=1$: (15.1₁) besagt

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^1 [f(t, \bar{u}(t))] = f_t(t, \bar{u}(t)) + f_v(t, \bar{u}(t)) \cdot \underbrace{\frac{d}{dt} \bar{u}(t)}_{= f(t, \bar{u}(t))} = f_t(t, \bar{u}(t)) + f_v(t, \bar{u}(t)) \cdot f(t, \bar{u}(t))$$

|| ?

$$(1+1) \cdot \left[\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^1 \varphi \right] (t, \bar{u}(t), 0) = 2 \cdot \sum_{i=1}^2 \gamma_i \left[\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^1 \kappa_i \right] (t, \bar{u}(t), 0)$$

$$= f_t(t, \bar{u}(t)) \cdot 2(\alpha_1 \gamma_1 + \alpha_2 \gamma_2) + f_v(t, \bar{u}(t)) \cdot f(t, \bar{u}(t)) \cdot 2(\gamma_1 \beta_{11} + \gamma_2 (\beta_{21} + \beta_{22}))$$

$$(A2): 2(\alpha_1 \gamma_1 + \alpha_2 \gamma_2) = 1$$

$$(A3): 2(\gamma_1 \beta_{11} + \gamma_2 (\beta_{21} + \beta_{22})) = 1$$

• $i=2$: (15.1₂) besagt

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^2 [f(t, \bar{u}(t))] = f_{tt}(t, \bar{u}(t)) + \underbrace{f_{tv}(t, \bar{u}(t)) \cdot f(t, \bar{u}(t)) + f_{vt}(t, \bar{u}(t)) \cdot f(t, \bar{u}(t))}_{= 2 f_{vt}(t, \bar{u}(t)) \cdot f(t, \bar{u}(t))} + f_{vv}(t, \bar{u}(t)) \cdot (f(t, \bar{u}(t)))^2 + f_v(t, \bar{u}(t)) f_t(t, \bar{u}(t)) + f_v(t, \bar{u}(t)) \cdot f_v(t, \bar{u}(t)) \cdot f(t, \bar{u}(t))$$

|| ?

$$(2+1) \cdot \left[\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 \varphi \right] (t, \bar{u}(t), 0) = 3 \cdot \sum_{i=1}^2 \gamma_i \left[\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 \kappa_i \right] (t, \bar{u}(t), 0)$$

$$= f_{tt}(t, \bar{u}(t)) \cdot 3 \cdot (\gamma_1 \alpha_1^2 + \gamma_2 \alpha_2^2) + f_{vt}(t, \bar{u}(t)) \cdot f(t, \bar{u}(t)) \cdot 3 \cdot (2 \alpha_1 \beta_{11} \gamma_1 + 2 \alpha_2 (\beta_{21} + \beta_{22}) \gamma_2) + f_{vv}(t, \bar{u}(t)) \cdot (f(t, \bar{u}(t)))^2 \cdot 3 \cdot (\beta_{11}^2 \gamma_1 + (\beta_{21} + \beta_{22})^2 \gamma_2) + f_v(t, \bar{u}(t)) \cdot f_t(t, \bar{u}(t)) \cdot 3 \cdot (2 \alpha_1 \beta_{11} \gamma_1 + 2(\alpha_1 \beta_{21} + \alpha_2 \beta_{22}) \gamma_2) + f_v(t, \bar{u}(t)) \cdot f_v(t, \bar{u}(t)) \cdot f(t, \bar{u}(t)) \cdot 3 \cdot (2 \beta_{11}^2 \gamma_1 + (2 \beta_{11} \beta_{21} + 2 \beta_{22} (\beta_{21} + \beta_{22})) \gamma_2)$$

$$(A4): 3 \cdot (\gamma_1 \alpha_1^2 + \gamma_2 \alpha_2^2) = 1$$

$$(A5): 3 \cdot (2 \alpha_1 \beta_{11} \gamma_1 + 2 \alpha_2 (\beta_{21} + \beta_{22}) \gamma_2) = 2$$

$$(A6): 3 \cdot (\beta_{11}^2 \gamma_1 + (\beta_{21} + \beta_{22})^2 \gamma_2) = 1$$

$$(A7): 3 \cdot (2 \alpha_1 \beta_{11} \gamma_1 + 2(\alpha_1 \beta_{21} + \alpha_2 \beta_{22}) \gamma_2) = 1$$

$$(A8): 3 \cdot (2 \beta_{11}^2 \gamma_1 + (2 \beta_{11} \beta_{21} + 2 \beta_{22} (\beta_{21} + \beta_{22})) \gamma_2) = 1$$

⇒ 8 Gleichungen für 7 Unbekannte ($\alpha_1, \alpha_2, \beta_{11}, \beta_{21}, \beta_{22}, \gamma_1, \gamma_2$).

• Wir vereinfachen die Bedingungen (A1)-(A8) durch die zusätzliche Forderung

$$(A9): \alpha_1 = \beta_{11}$$

$$(A10): \alpha_2 = \beta_{21} + \beta_{22}$$

so fallen die folgenden Bedingungen zusammen:

$$(A2) \& (A3), (A4) \& (A5) \& (A6), (A7) \& (A8)$$

Es bleiben also (A1), (A2), (A4), (A7), (A9), (A10), d.h. 6 Gleichungen für 7 Unbekannte.

- Wählen wir $\gamma_1 := \frac{1}{2}$, so folgt aus (A1) $\gamma_2 = \frac{1}{2}$. Es verbleiben 5 Gleichungen

$$(A2)' : \alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

$$(A4)' : 3(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) = 2$$

$$(A7)' : 3(\alpha_1 \cdot (\beta_{11} + \beta_{21}) + \alpha_2 \beta_{22}) = 1$$

$$(A9) : \alpha_1 = \beta_{11}$$

$$(A10) : \alpha_2 = \beta_{21} + \beta_{22}$$

für die 5 Unbekannten $\alpha_1, \alpha_2, \beta_{11}, \beta_{21}, \beta_{22}$. Dieses System besitzt 2 Lösungen

- Eine mögliche Lösung lautet:

$$\alpha_1 = \beta_{11} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\beta_{21} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\beta_{22} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

woraus wir folgendes Tableau erhalten

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) & \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) & 0 \\ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

Die andere Lösung lautet

$$\alpha_1 = \beta_{11} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\beta_{21} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\beta_{22} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

mit dem Tableau

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) & \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) & 0 \\ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$