

Aufgaben zur Vorlesung
Numerik II
Wintersemester 2012/13
Übungsblatt 6

W.-J. Beyn
D. Otten

Abgabe: Mittwoch, 21.11.2012, vor Beginn der Übung

Übung: Mi. 12:15–13:45, V5-148

Aufgabe 16 [implizite Runge-Kutta-Verfahren und lineare AWA]

Wenden Sie die beiden Gauß-artigen impliziten Runge-Kutta Verfahren ($m = 1, p = 2$, bzw. $m = 2, p = 4$) auf das System mit konstanten Koeffizienten an

$$u' = Au, t \geq 0, u(0) = u^0 \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n,n}.$$

Zeigen Sie, dass die Verfahren die Form

$$u^{j+1} = A_h u^j, j = 0, 1, 2, \dots$$

mit einer Matrix $A_h = r(hA)$ haben. Dabei ist $r(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ eine rationale Funktion und man definiert $r(C) = p(C)(q(C))^{-1}$ für $C \in \mathbb{R}^{n,n}$. Bis zu welcher Ordnung stimmen die Taylorentwicklungen von $r(z)$ und e^z bei $z = 0$ überein?

Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall $n = 1$.

(6 Punkte)

Aufgabe 17: [Lipschitz-Stetigkeit expliziter Runge-Kutta-Verfahren]

Sei $\varphi = \varphi(t, v, h)$ die Verfahrensfunktion eines konsistenten expliziten Runge-Kutta-Verfahrens zur Bestimmung der numerischen Lösung der Differentialgleichung

$$u' = f(t, u), \quad u(t_0) = u^0,$$

wobei $f : [t_0, t_E] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz beschränkt mit der Konstanten L sei.

Zeigen Sie, dass φ einer Lipschitz-Bedingung im zweiten Argument genügt, dass also ein L_h existiert mit

$$\|\varphi(t, v, h) - \varphi(t, w, h)\| \leq L_h \|v - w\| \quad \forall t \in [t_0, t_E] \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n.$$

Wie verhält sich L_h für $h \rightarrow 0$?

(6 Punkte)

Aufgabe 18: [Implementierung des klassischen Runge-Kutta-Verfahrens]

Lösen Sie die Anfangswertaufgabe zum (modifizierten) Lotka-Volterra-Modell

$$\begin{aligned}x' &= \alpha(1 - y)x - \lambda x^2, \quad x(0) = x_0, \\y' &= (x - 1)y - \mu y^2, \quad y(0) = y_0,\end{aligned}$$

mit konstanter Schrittweite und dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren für $t \in [0, 5]$ und $\alpha = 10$.

- a) Führen Sie jeweils eine Rechnung mit $h = \frac{1}{40}$, $(x_0, y_0) = (3, 1)$ für die Parameterwerte $\lambda = \mu = 0$ und $\lambda = \mu = 1$ durch. Berechnen Sie auch den Wert der Erhaltungsgröße $E(x, y)$ des Lotka-Volterra-Modells an den numerischen Näherungsvektoren. Zeichnen Sie jeweils (t, x) , (t, y) und $(t, E(x, y))$.
- b) Berechnen Sie die experimentelle Konvergenzordnung

$$\text{EOC}(h, qh, q^2h) := \frac{1}{\ln q} \ln \left(\frac{\|u_{qh}(2) - u_{q^2h}(2)\|_2}{\|u_h(2) - u_{qh}(2)\|_2} \right)$$

zur Zeit $t = 2$ für den Anfangswert $(x_0, y_0) = (1, \frac{1}{2})$, die Parameterwerte $\lambda = \mu = 1$ und Schrittweiten $h = q^i h_0$, $i = 0, \dots, 6$, $q = \frac{1}{2}$, $h_0 = \frac{1}{2}$, wobei u_h die numerische Näherungslösung zur Schrittweite h bezeichne. Welche Beobachtungen machen Sie?

Senden Sie Ihr Programm per Email an dotten@math.uni-bielefeld.de.

(6 Punkte)

Numerik II (WS 12/13)
 Übungsblatt 06
 Lösungen

Aufgabe 16:

Wenden Sie die Gauß-artigen impliziten Runge-Kutta Verfahren

a)
$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array}$$

 $m=1, p=2$

und

b)
$$\begin{array}{c|cc} \frac{3-\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1-\sqrt{3}}{6} \\ \hline \frac{3+\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

 $m=2, p=4$

auf das System

$$u' = Au =: f(u), \quad t \geq 0, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$u(0) = u^0 \in \mathbb{R}^n$$

an. Zeigen Sie, dass die Verfahren die Form

$$u^{j+1} = A_h u^j, \quad j=0,1,2,\dots$$

mit einer Matrix $A_h = r(hA)$ haben. Hierbei ist $r(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ eine rationale Funktion und man definiert $r(c) = p(c) \cdot (q(c))^{-1}$ für $c \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Bis zu welcher Ordnung stimmen die Taylorentwicklungen von $r(z)$ und e^z bei $z=0$ überein?

Lösung:

Es gilt

$$u^{j+1} = u^j + h \cdot \varphi(t_j, u^j, h)$$

$$\varphi(t, v, s) = \sum_{i=1}^m \gamma_i K_i(t, v, s)$$

$$K_i(t, v, s) = f(t + \alpha_i s, v + s \sum_{l=1}^m \beta_{il} K_l(t, v, s)), \quad i=1, \dots, m$$

da RK-Verfahren implizit

a) K_1 :

$$K_1(t, v, s) = f(t + \alpha_1 s, v + s \beta_{11} K_1(t, v, s)) = Av + s \beta_{11} A K_1(t, v, s)$$

$$\Rightarrow (I_n - s \beta_{11} A) K_1(t, v, s) = Av$$

$$\Rightarrow K_1(t, v, s) = (I_n - s \beta_{11} A)^{-1} Av$$

Wähle nun $\beta_{11} = \frac{1}{2}$ so gilt

$$K_1(t, v, s) = (I_n - \frac{1}{2} \cdot s A)^{-1} Av$$

Dies liefert uns

$$u^{j+1} = u^j + h \cdot \gamma_1 \cdot K_1(t_j, u^j, h) = u^j + \gamma_1 (I_n - \frac{1}{2} h A)^{-1} h A u^j$$

$$= [I_n (I_n - \frac{1}{2} h A) + \gamma_1 h A] (I_n - \frac{1}{2} h A)^{-1} u^j$$

$$= [I_n + (\gamma_1 - \frac{1}{2}) h A] (I_n - \frac{1}{2} h A)^{-1} u^j = \underbrace{(I_n + \frac{1}{2} h A) (I_n - \frac{1}{2} h A)^{-1}}_{\gamma_1=1} u^j = r(hA) = A_h$$

$$AB=BA \Rightarrow AB^{-1}=B^{-1}A$$

wobei

$$r(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{(1 + \frac{1}{2} z)}{(1 - \frac{1}{2} z)}, \quad \text{d.h. } p(z) = 1 + \frac{1}{2} z \quad \text{und} \quad q(z) = 1 - \frac{1}{2} z$$

$$(16.6) \quad = (I_n - s(\beta_{11} + \beta_{21})A + s^2(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21})A^2)^{-1} (I_n - s(\beta_{11} - \beta_{21})A) AV$$

Setzen wir die Werte für β_{ij} aus dem RK-Tableau ein, so erhalten wir aus (16.5) & (16.6)

$$K_1(t|v, s) = (I_n - \frac{1}{2} sA + \frac{1}{12} s^2 A^2)^{-1} (I_n - \frac{\sqrt{3}}{6} sA) AV$$

$$K_2(t|v, s) = (I_n - \frac{1}{2} sA + \frac{1}{12} s^2 A^2)^{-1} (I_n + \frac{\sqrt{3}}{6} sA) AV$$

Dies liefert uns für $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2}$

$$u^{j+1} = u^j + h \cdot \gamma_1 \cdot k_1(t_j, u^j, h) + h \gamma_2 \cdot k_2(t_j, u^j, h)$$

$$= (I_n - \frac{1}{2} hA + \frac{1}{12} h^2 A^2)^{-1} \left[(I_n - \frac{1}{2} hA + \frac{1}{12} h^2 A^2) + \frac{1}{2} (I_n - \frac{\sqrt{3}}{6} hA) hA + \frac{1}{2} (I_n + \frac{\sqrt{3}}{6} hA) hA \right] u^j$$

$$= (I_n - \frac{1}{2} hA + \frac{1}{12} h^2 A^2)^{-1} (I_n + \frac{1}{2} hA + \frac{1}{12} h^2 A^2) u^j$$

$$= \underbrace{(I_n + \frac{1}{2} hA + \frac{1}{12} h^2 A^2) (I_n - \frac{1}{2} hA + \frac{1}{12} h^2 A^2)^{-1}}_{= r(hA) = A_n} u^j$$

wobei

$$r(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{1 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{12}z^2}{1 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{12}z^2}, \text{ d.h. } p(z) = 1 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{12}z^2, q(z) = 1 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{12}z^2.$$

Taylorentwicklung (um 0):

$$r(z) = \frac{(1 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{12}z^2)}{(1 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{12}z^2)}$$

$$\Rightarrow r(0) = 1$$

$$r^{(1)}(z) = \frac{(1 - \frac{1}{12}z)}{(1 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{12}z^2)^2}$$

$$\Rightarrow r^{(1)}(0) = 1$$

$$r^{(2)}(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{12}z^2}{(1 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{12}z^2)^3}$$

$$\Rightarrow r^{(2)}(0) = 1$$

$$r^{(3)}(z) = \frac{1 - z + \frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{288}z^4}{(1 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{12}z^2)^4}$$

$$\Rightarrow r^{(3)}(0) = 1$$

$$r^{(4)}(z) = \frac{1 - \frac{5}{3}z + \frac{5}{6}z^2 - \frac{5}{36}z^3 + \frac{1}{720}z^5}{(1 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{12}z^2)^5}$$

$$\Rightarrow r^{(4)}(0) = 1$$

$$r^{(5)}(z) = \frac{\frac{5}{6} - \frac{5}{2}z + \frac{25}{12}z^2 - \frac{25}{36}z^3 + \frac{25}{288}z^4 - \frac{5}{10368}z^6}{(1 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{12}z^2)^6}$$

$$\Rightarrow r^{(5)}(0) = \frac{5}{6}$$

u.s.w.

Koeffizienten stimmen nicht mehr überein

Es folgt

$$T_r(z; 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{(n)}(0)}{n!} \cdot (z-0)^n = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{144}z^5 + \dots$$

$$T_{\exp}(z; 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp^{(n)}(0)}{n!} \cdot (z-0)^n = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5 + \dots$$

\Rightarrow Bis zur Ordnung 4 stimmen die Koeffizienten überein.
 $\hat{=} p(=2 \cdot m)$

Taylorentwicklung (um 0):

$$\Gamma(z) = \frac{(1 + \frac{1}{2}z)}{(1 - \frac{1}{2}z)} \Rightarrow \Gamma(0) = 1$$

$$\Gamma^{(1)}(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z)^2} \Rightarrow \Gamma^{(1)}(0) = 1$$

$$\Gamma^{(2)}(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z)^3} \Rightarrow \Gamma^{(2)}(0) = 1$$

$$\Gamma^{(3)}(z) = \frac{\frac{3}{2}}{(1 - \frac{1}{2}z)^4} \Rightarrow \Gamma^{(3)}(0) = \frac{3}{2}$$

u. s. w.

Es folgt:

$$T_r(z; 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma^{(n)}(0)}{n!} \cdot (z-0)^n = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{4}z^3 + \dots$$

$$T_{\exp}(z; 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{\exp^{(n)}(0)}{n!}}_{= \frac{1}{n!}} \cdot (z-0)^n = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \dots$$

$\exp^{(n)}(z) = \exp(z) \Rightarrow \exp^{(n)}(0) = \exp(0) = 1$

Koeffizienten stimmen nicht mehr überein.

\Rightarrow Bis zur Ordnung 2 stimmen die Koeffizienten überein.
 "p (= 2·m)"

b)

$$(16.1) K_1(t, v, s) = f(t + \alpha_1 s, v + s\beta_{11}K_1(t, v, s) + s\beta_{12}K_2(t, v, s))$$

$$= Av + s\beta_{11}AK_1(t, v, s) + s\beta_{12}AK_2(t, v, s)$$

$$(16.2) K_2(t, v, s) = f(t + \alpha_2 s, v + s\beta_{21}K_1(t, v, s) + s\beta_{22}K_2(t, v, s))$$

$$= Av + s\beta_{21}AK_1(t, v, s) + s\beta_{22}AK_2(t, v, s)$$

Aus (16.1) & (16.2) erhalten wir

$$(16.3) (I_n - s\beta_{11}A)K_1(t, v, s) = Av + s\beta_{12}AK_2(t, v, s)$$

$$(16.4) (I_n - s\beta_{22}A)K_2(t, v, s) = Av + s\beta_{21}AK_1(t, v, s)$$

K_1 : Wir multiplizieren (16.3) von links mit $(I_n - s\beta_{22}A)$ und wenden (16.4) an

$$(I_n - s\beta_{22}A)(I_n - s\beta_{11}A)K_1(t, v, s)$$

$$= (I_n - s\beta_{22}A)Av + s\beta_{12}A(I_n - s\beta_{22}A)K_2(t, v, s)$$

$$= (I_n - s\beta_{22}A)Av + s\beta_{12}A(Av + s\beta_{21}AK_1(t, v, s))$$

$$= (I_n + s(\beta_{12} - \beta_{22})A)Av + s^2\beta_{12}\beta_{21}A^2K_1(t, v, s)$$

Multiplizieren wir die linke Seite aus und bringen wir den letzten Term auf die linke Seite

$$(I_n - s(\beta_{11} + \beta_{22})A + s^2(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21})A^2)K_1(t, v, s) = (I_n + s(\beta_{12} - \beta_{22})A)Av$$

Multiplizieren wir mit der Inversen der linken Seite

$$(16.5) K_1(t, v, s) = \underbrace{(I_n - s(\beta_{11} + \beta_{22})A + s^2(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21})A^2)^{-1}}_{=: B} (I_n + s(\beta_{12} - \beta_{22})A)Av$$

K_2 : Wir multiplizieren (16.4) von links mit $B(I_n - s\beta_{22}A)^{-1}$ und wenden (16.5) an

$$K_2(t, v, s) = (I_n - s\beta_{22}A)^{-1}(Av + s\beta_{21}AK_1(t, v, s))$$

$$= (I_n - s\beta_{22}A)^{-1}(B^{-1}BAv + s\beta_{21}AB^{-1}(I_n + s(\beta_{12} - \beta_{22})A)Av)$$

$$= B^{-1}(I_n - s\beta_{22}A)^{-1}(B + s\beta_{21}A + s^2\beta_{21}(\beta_{12} - \beta_{22})A^2)Av$$

$$= B^{-1}(I_n - s\beta_{22}A)^{-1}(I_n - s\beta_{22}A - s(\beta_{11} - \beta_{21})A + s^2\beta_{22}(\beta_{11} - \beta_{21})A^2)Av$$

$$= B^{-1}(I_n - s\beta_{22}A)^{-1}(I_n - s\beta_{22}A)(I_n - s(\beta_{11} - \beta_{21})A)Av$$

Aufgabe 17:

Sei $\varphi = \varphi(t, v, h)$ die Verfahrensfunktion eines **Konsistenten** expliziten RK-Verfahrens zur Bestimmung der numerischen Lösung von

$$u' = f(t, u), \quad u(t_0) = u^0$$

wobei $f: [t_0, t_E] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz beschränkt mit Konstante L sei, d.h.

$$\|f(t, v) - f(t, w)\| \leq L \|v - w\| \quad \forall t \in [t_0, t_E] \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n$$

Zeigen Sie, dass φ einer Lipschitz-Bedingung im 2. Argument genügt, d.h. für $h > 0$ gilt

$$\exists L_h \geq 0 : \|\varphi(t, v, h) - \varphi(t, w, h)\| \leq L_h \cdot \|v - w\| \quad \forall t \in [t_0, t_E] \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n$$

Wie verhält sich L_h für $h \rightarrow 0$?

Lösung:

1. Möglichkeit:

1. Zeige per Induktion: Für $h > 0$ fest, gilt

$$\textcircled{IV} \quad \forall i=1, \dots, m : \exists L_{hi} \geq 0 : \|K_i(t, v, h) - K_i(t, w, h)\| \leq L_{hi} \cdot \|v - w\| \quad \forall t \in [t_0, t_E] \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n$$

f Lipschitz

Beweis:

$\textcircled{IA} : i=1 :$

$$\|K_1(t, v, h) - K_1(t, w, h)\| = \|f(t, v) - f(t, w)\| \leq L \cdot \|v - w\|$$

$$L_{h1} = L$$

$\textcircled{IS} : i-1 \rightarrow i :$

$$\begin{aligned} & \|K_i(t, v, h) - K_i(t, w, h)\| \\ &= \|f(t + \alpha_i h, v + h \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} K_j(t, v, h)) - f(t + \alpha_i h, w + h \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} K_j(t, w, h))\| \\ &\stackrel{\text{f Lipschitz}}{\leq} L \cdot \|v - w + h \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} (K_j(t, v, h) - K_j(t, w, h))\| \end{aligned}$$

$$\stackrel{\Delta \text{Stärke}}{\leq} L \|v - w\| + h \cdot \sum_{j=1}^{i-1} |\beta_{ij}| \cdot \|K_j(t, v, h) - K_j(t, w, h)\|$$

$$\leq \underbrace{\left(L + h \cdot \sum_{j=1}^{i-1} |\beta_{ij}| L_{hj} \right)}_{=: L_{hi}} \|v - w\|$$

$\stackrel{\textcircled{IV}}{\leq} L_{hj} \|v - w\| \quad \forall j=1, \dots, i-1$

2. Zeige: Für $h > 0$ fest, gilt:

$$\exists L_h \geq 0 : \|\varphi(t, v, h) - \varphi(t, w, h)\| \leq L_h \cdot \|v - w\| \quad \forall t \in [t_0, t_E] \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \|\varphi(t, v, h) - \varphi(t, w, h)\| &= \left\| \sum_{i=1}^m \gamma_i (K_i(t, v, h) - K_i(t, w, h)) \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^m |\gamma_i| \cdot \|K_i(t, v, h) - K_i(t, w, h)\| \stackrel{\text{nach 1.}}{\leq} L_{hi} \|v - w\| \\ &\leq \underbrace{\left(\sum_{i=1}^m L_{hi} |\gamma_i| \right)}_{=: L_h} \|v - w\| \quad \forall t \in [t_0, t_E] \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

3. Da

$$L_{hi} = L + h \sum_{j=1}^{i-1} |\beta_{ij}| L_{hj}, \quad 1 \leq i \leq m$$

folgt

$$\lim_{h \rightarrow 0} L_{hi} = L \quad \forall 1 \leq i \leq m$$

also

$$\lim_{h \rightarrow 0} L_h = \sum_{i=1}^m \delta_i \cdot \lim_{h \rightarrow 0} L_{hi} = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^m \delta_i \right)}_{=1} \cdot L = L$$

(da RK-Verfahren konsistent)

2. Möglichkeit: (Direkter Beweis)

$$\begin{aligned} & \| \varphi(t, v, h) - \varphi(t, w, h) \| \\ &= \left\| \sum_{i=1}^m \delta_i (k_i(t, v, h) - k_i(t, w, h)) \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^m \underbrace{|\delta_i|}_{=\delta_i} \cdot \| k_i(t, v, h) - k_i(t, w, h) \| \\ &= \sum_{i=1}^m \delta_i \left\| f\left(t + \alpha_i h, v + h \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j(t, v, h)\right) - f\left(t + \alpha_i h, w + h \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j(t, w, h)\right) \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^m \delta_i \left(L \|v - w\| + Lh \sum_{j=1}^{i-1} |\beta_{ij}| \cdot \|k_j(t, v, h) - k_j(t, w, h)\| \right) \\ &\leq L \|v - w\| + Lh \sum_{j=1}^{i-1} |\beta_{ij}| \|k_j(t, v, h) - k_j(t, w, h)\| \\ &\leq L \|v - w\| + Lh \sum_{j=1}^{i-1} |\beta_{ij}| \|k_j(t, v, h) - k_j(t, w, h)\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq L \cdot \left[\left(\sum_{i=1}^m \delta_i \right) + hL \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{i-1} \delta_i |\beta_{ij}| \right) + h^2 L^2 \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=1}^{j-1} \delta_i |\beta_{ij}| |\beta_{jk}| \right) \right. \\ &\quad \left. + \dots + h^{m-1} L^{m-1} \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=1}^{j-1} \dots \sum_{l=1}^{k-1} \delta_i |\beta_{ij}| |\beta_{jk}| \dots |\beta_{lm-2, l-1}| \right) \right] \|v - w\| \end{aligned}$$

$$=: L_h \|v - w\|$$

Da $\sum_{i=1}^m \delta_i = 1$ aus Konsistenzgründen gilt, folgt

$$\lim_{h \rightarrow 0} L_h = L.$$

Dem erfahrenen Leser bleibt für die "formale" obige Rechnung des folgenden Induktionsbeweises:

$$\forall i=1, \dots, m: \|k_i(t, v, h) - k_i(t, w, h)\| \leq L \cdot \left[1 + hL \left(\sum_{j=1}^{i-1} |\beta_{ij}| \right) + h^2 L^2 \left(\sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=1}^{j-1} |\beta_{ij}| |\beta_{jk}| \right) \right. \\ \left. + \dots + h^{m-1} L^{m-1} \left(\sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=1}^{j-1} \dots \sum_{l=1}^{k-1} |\beta_{ij}| |\beta_{jk}| \dots |\beta_{lm-2, l-1}| \right) \right] \|v - w\|$$

Aufgabe 18:

```

% Aufgabenteil (a)
%% Berechnung 1
alpha2 = 10;
lambda = 0;
mu = 0;
f = @(t,v) [alpha2*(1-v(2))*v(1)-lambda*v(1)^2; (v(1)-1)*v(2)-mu*v(2)^2];
u_init=[3;1];
t_init=0;
t_end=5;
h=1/40;
E = @(v) v(1,:).*exp(-v(1,:)).*v(2,:).^(alpha2).*exp(-alpha2*v(2,:));

%% Runge-Kutta-Tableau (m=4) Klassisches Runge-Kutta-Verfahren
alpha=[0 1/2 1/2 1];
beta=[0 0 0 0;1/2 0 0 0;0 1/2 0 0;0 0 1 0];
gamma=[1/6 1/3 1/3 1/6];

[tn_rkclassic,un_rkclassic]=rk_explicit(f,u_init,t_init,t_end,h,alpha,beta,
gamma);

%% Erhaltungsgroesse bestimmen
EG = E(un_rkclassic);

%% Graphische Ausgabe
figure
subplot(2,3,1)
hold on
plot(tn_rkclassic,un_rkclassic(1,:), 'b');
plot(tn_rkclassic,un_rkclassic(2,:), 'r');
hold off
title('a) Loesungen x und y fuer \lambda=\mu=0');
xlabel('t'); ylabel('x(t),y(t)');
legend(' (t,x)', ' (t,y)', 'Location', 'Best');

subplot(2,3,2)
semilogy(tn_rkclassic,EG, 'g');
title('a) Erhaltungsgroesse fuer \lambda=\mu=0');
xlabel('t'); ylabel('E(x(t),y(t))');
legend(' (t,E(x,y))', 'Location', 'Best');

subplot(2,3,3)
plot(un_rkclassic(1,:),un_rkclassic(2,:), 'k');
title('a) Phasendiagramm fuer \lambda=\mu=0');
xlabel('x(t)'); ylabel('y(t)');

%% Berechnung 2
alpha2 = 10;
lambda = 1;
mu = 1;
f = @(t,v) [alpha2*(1-v(2))*v(1)-lambda*v(1)^2; (v(1)-1)*v(2)-mu*v(2)^2];
u_init=[3;1];
t_init=0;
t_end=5;
h=1/40;
E = @(v) v(1,:).*exp(-v(1,:)).*v(2,:).^(alpha2).*exp(-alpha2*v(2,:));

```



```
%% Runge-Kutta-Tableau (m=4) Klassisches Runge-Kutta-Verfahren
alpha=[0 1/2 1/2 1];
beta=[0 0 0 0;1/2 0 0 0;0 1/2 0 0;0 0 1 0];
gamma=[1/6 1/3 1/3 1/6];

[tn_rkclassic2,un_rkclassic2]=rk_explicit(f,u_init,t_init,t_end,h,alpha,beta,
gamma);

%% Erhaltungsgroesse bestimmen
EG2 = E(un_rkclassic2);

%% Graphische Ausgabe
subplot(2,3,4)
hold on
plot(tn_rkclassic2,un_rkclassic2(1,:), 'b');
plot(tn_rkclassic2,un_rkclassic2(2,:), 'r');
hold off
title('b) Loesungen x und y fuer \lambda=\mu=1')
xlabel('t'); ylabel('x(t),y(t)');
legend(' (t,x)', ' (t,y)', 'Location', 'Best');

subplot(2,3,5)
semilogy(tn_rkclassic2,EG2, 'g');
title('b) Erhaltungsgroesse fuer \lambda=\mu=1');
xlabel('t'); ylabel('E(x(t),y(t))');
legend(' (t,E(x,y))', 'Location', 'Best');

subplot(2,3,6)
plot(un_rkclassic2(1,:),un_rkclassic2(2,:), 'k');
title('b) Phasendiagramm fuer \lambda=\mu=1');
xlabel('x(t)'); ylabel('y(t)');
```

```

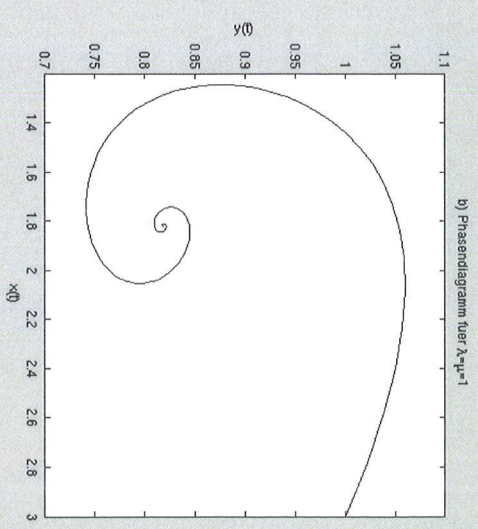
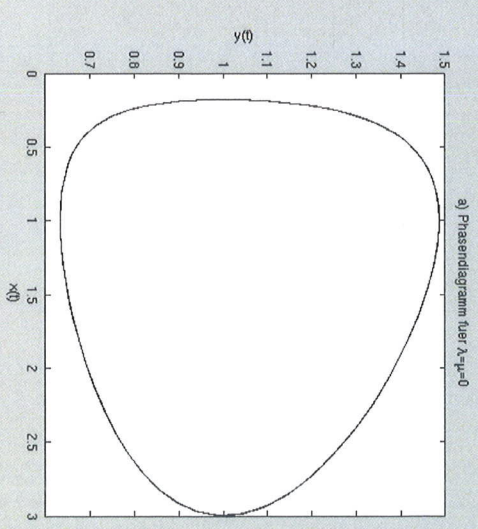
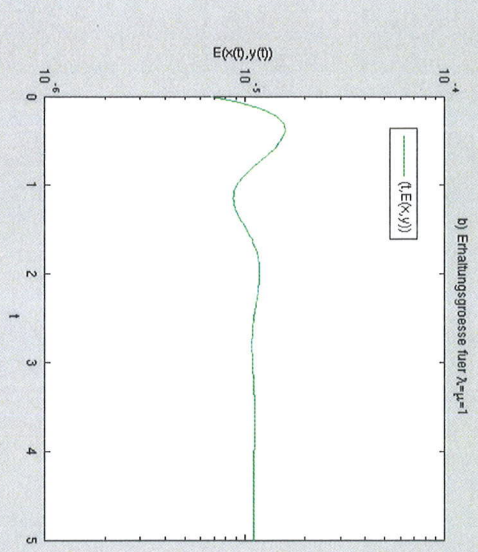
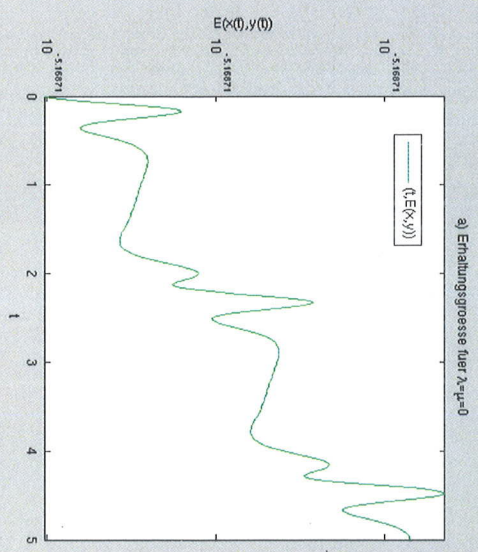
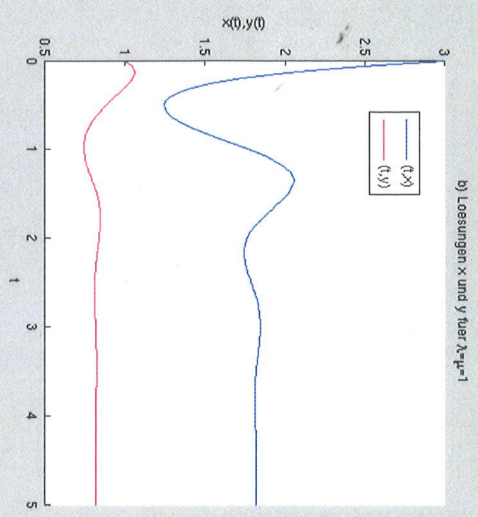
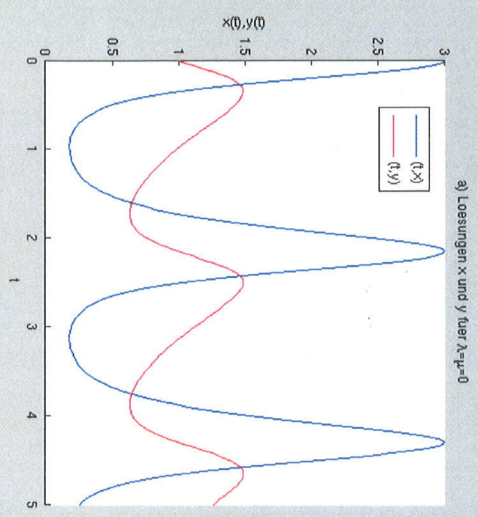
function [tn,un] = rk_explicit(f,u_init,t_init,t_end,h,alpha,beta,gamma)
%RK_EXPLICIT loest Anfangswertprobleme der Form
%
%   u'(t) = f(t,u(t)), u(t_init) = u_init
%
%   mit expliziten Runge-Kutta Verfahren (alpha,beta,gamma)
%
%   zur konstanten Zeitschrittweite h auf dem endlichen
%   Zeitintervall [t_init,t_end].
%
%% Initialisierung
m=length(gamma);           % Stufe des RK-Verfahrens
tn=t_init:h:t_end;        % diskretes Zeitintervall
time_steps=length(tn);    % Anzahl der Zeitschritte
space_dim=length(u_init); % Dimension der DGL, Raumdimension
un=zeros(space_dim,time_steps); % Speicherreservierung fuer RK-Iteration
un(:,1)=u_init;           % Initialisierung der Anfangsdaten
k=zeros(space_dim,m);     % Speicherreservierung der k_i's

%% Explizites Runge-Kutta-Verfahren
for j=2:time_steps
    % Berechnung der k_i's
    for i=1:m
        temp_k=zeros(space_dim,1);
        for l=1:i-1
            temp_k=temp_k+beta(i,l)*k(:,l);
        end
        k(:,i)=f(tn(j-1)+alpha(i)*h,un(:,j-1)+h*temp_k);
    end

    % Berechnung der u^j's
    temp_phi=zeros(space_dim,1);
    for i=1:m
        temp_phi=temp_phi+gamma(i)*k(:,i);
    end
    un(:,j)=un(:,j-1)+h*temp_phi;
end
end

```


Figure 1




```

%% Aufgabenteil (b)
alpha2 = 10;
lambda = 1;
mu = 1;
f = @(t,v) [alpha2*(1-v(2))*v(1)-lambda*v(1)^2; (v(1)-1)*v(2)-mu*v(2)^2];
u_init=[1;1/2];
t_init=0;
t_end=2;
h0=1/2;
q=1/2;
h_grid=h0.*q.^(0:10);
time_stepsizes = length(h_grid);

t_grid=cell(1,time_stepsizes);
un_rkclassic=cell(1,time_stepsizes);

for n=1:time_stepsizes
    t_grid{n} = t_init:h_grid(n):t_end;
    un_rkclassic{n} = zeros(length(u_init),length(t_grid{n}));
    un_rkclassic{n}(:,1) = u_init;
end

%% Runge-Kutta-Tableau (m=4) Klassisches Runge-Kutta-Verfahren
alpha=[0 1/2 1/2 1];
beta=[0 0 0 0;1/2 0 0 0;0 1/2 0 0;0 0 1 0];
gamma=[1/6 1/3 1/3 1/6];

for n=1:time_stepsizes
    [tn_rkclassic,un_rkclassic{n}]=rk_explicit(f,u_init,t_init,t_end,h_grid(n),
alpha,beta,gamma);
end

%% Experimentelle Konvergenzordnung (EOC)
% Moeglichkeit 1: (benoetigt 3 numerische Loesungen)
err_rkclassic = zeros(time_stepsizes-1,1);

for n=1:time_stepsizes-1
    err_rkclassic(n) = norm(un_rkclassic{n}(:,end)-un_rkclassic{n+1}(:,end));
end

EOC_rkclassic = zeros(time_stepsizes-2,1);

for n=1:time_stepsizes-2
    EOC_rkclassic(n) = log(err_rkclassic(n+1)/err_rkclassic(n))/log(q);
end

%% Output
fprintf('\n Experimentelle Konvergenzordnungen (EOC) mittels drei numerischer
Loesungen\n');
fprintf('    h    Klass. RK-Verfahren\n');
fprintf('-----\n');
fprintf('%6.5f\n',h_grid(1));
fprintf('%6.5f\n',h_grid(2));
for n=3:time_stepsizes
    fprintf('%6.5f    %10.9f\n',h_grid(n),EOC_rkclassic(n-2));
end

```