Aufgaben zur Vorlesung
Numerik II

Wintersemester 2012/13
Übungsblatt 11

W.–J. Beyn
D. Otten

Abgabe: Mittwoch, 16.01.2013, vor Beginn der Übung

Übung: Mi. 12:15–13:45, V5-148

Aufgabe 33: [Schießmethode]

Überlegen Sie sich eine Schießmethode für die allgemeine skalare Sturmsche Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} u''(x) &= f(x,u(x)), \quad a \le x \le b, \\ \alpha_a u(a) - \beta_a u'(a) &= \gamma_a, \\ \alpha_b u(b) + \beta_b u'(b) &= \gamma_b, \end{aligned}$$

wobei $\alpha_a^2 + \beta_a^2 > 0$ und $\alpha_b^2 + \beta_b^2 > 0$ vorausgesetzt ist. Führen Sie nur einen reellen Parameter s ein und stellen Sie eine nichtlineare Gleichung $g(s) = 0$ auf, deren Lösung äquivalent zur Lösung der Randwertaufgabe ist. Geben Sie an, welche Anfangswertaufgabe man lösen muss, um die Ableitung $g'(s)$ zu erhalten.

(6 Punkte)

Aufgabe 34: [Fredholmsche Alternative]

Man beweise für die lineare Randwertaufgabe 2. Ordnung

$$\begin{aligned} Lu &:= u'' + pu' + qu = r, \text{ in } [a,b] \text{ mit } p,q,r \in C([a,b],\mathbb{R}) \\ Ru &:= \begin{pmatrix} \alpha_a u(a) + \beta_a u'(a) \\ \alpha_b u(b) + \beta_b u'(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_a \\ \gamma_b \end{pmatrix} = \gamma \end{aligned}$$

unter Verwendung der Fredholmschen Alternative für lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung (vgl. Skript, Satz 4.1), dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Die homogene Aufgabe $Lu = 0$, $Ru = 0$ besitzt nur die triviale Lösung.

(ii) Die Matrix

$$\begin{pmatrix} \alpha_a & \beta_a \\ \alpha_b y_1(b) + \beta_b y_1'(b) & \alpha_b y_2(b) + \beta_b y_2'(b) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$$

ist invertierbar.
Dabei bezeichnen y_1, y_2 Lösungen des homogenen Gleichung $Ly = 0$ zu den Anfangswerten $y_1(a) = 1$, $y_1'(a) = 0$, bzw. $y_2(a) = 0$, $y_2'(a) = 1$.

(iii) Für jedes $r \in C([a,b],\mathbb{R})$ und jedes $\gamma \in \mathbb{R}^2$ besitzt die inhomogene Randwertaufgabe $Lu = r$, $Ru = \gamma$ genau eine Lösung $u \in C^2([a,b],\mathbb{R})$.

(6 Punkte)

Zusatz: Untersuchen Sie die Lösbarkeit der Randwertaufgaben

a) $u'' - u' - 2u = 0$, $u(0) + u'(0) = 1$, $u(1) = 0$,

b) $u'' + u = 0$, $u(0) = \gamma_a$, $u(\pi) = \gamma_b$. (4 Zusatzpunkte)

Aufgabe 35: [Implementierung eines Schießverfahrens]

Lösen Sie die skalare Randwertaufgabe

$$u'' = \frac{3}{2}u^2, \quad x \in [0,1], \quad u(0) = 4,\ u(1) = 1$$

numerisch mit dem einfachen Schießverfahren:
Bezeichnet $u(x,s)$ die Lösung der Differentialgleichung zu den Anfangswerten

$$u(0) = 4,\ u'(0) = s,$$

so löse man die Gleichung

$$g(s) = u(1,s) - 1 = 0$$

mit Hilfe der Regula falsi (Skript Kapitel 4, §1.1) zu geeigneten Startwerten. Brechen Sie die Iteration ab, wenn $|g(s)| \leqslant tol$ erfüllt ist und berechnen Sie $u(1,s)$ mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren zur Schrittweite h für das entsprechende System 1. Ordnung ($h = \frac{1}{400}$, $tol = 10^{-12}$).
Plotten Sie beide Lösungskurven in dasselbe Diagramm!

Senden Sie Ihr Programm per Email an dotten@math.uni-bielefeld.de.

(6 Punkte)

Numerik II
Übungsblatt 11
Lösungen

Aufgabe 33:

Gegeben: RWP

(33.1)
$$\boxed{\begin{array}{ll} u''(x) = f(x, u(x)) & , x \in [a,b] \\ \alpha_a u(a) - \beta_a u'(a) = \gamma_a & , x = a \\ \alpha_b u(b) + \beta_b u'(b) = \gamma_b & , x = b \end{array}}$$

$(a < b)$
$\gamma_a, \gamma_b \in \mathbb{R}$
$f \in C^{0,1}([a,b] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$
$u : [a,b] \to \mathbb{R}$

mit

(33.2) $\alpha_a^2 + \beta_a^2 > 0$

und

(33.3) $\alpha_b^2 + \beta_b^2 > 0$.

(a): Führe $s \in \mathbb{R}$ ein und stelle eine nichtlineare Gleichung $g(s) = 0$ auf, deren Lösung äquivalent zur Lösung von (33.1) ist.

(b): Welche AWA muss man lösen um $g'(s)$ zu erhalten?

Lösung:

zu (a): (vgl. Kap 4, §1.1).

1. Herleitung von $g(s) = 0$:

Für $s \in \mathbb{R}$ betrachte das AWP

(33.4)
$$\boxed{\begin{array}{ll} u''(x) = f(x, u(x)) & , x \in [a,T] \\ \alpha_a u(a) - \beta_a u'(a) = \gamma_a & , x = a \\ \beta_a u(a) + \alpha_a u'(a) = s & , x = a \end{array}}$$

$T > a$
$\alpha_a, \beta_a, \gamma_a$ aus (33.1)

Hierbei gilt (für die letzten beiden Gleichungen)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_a & -\beta_a \\ \beta_a & \alpha_a \end{pmatrix}}_{=: A_a} \begin{pmatrix} u(a) \\ u'(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_a \\ s \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} u(a) \\ u'(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_a & -\beta_a \\ \beta_a & \alpha_a \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \gamma_a \\ s \end{pmatrix}$$

$$, \det A_a = \alpha_a^2 + \beta_a^2 \underset{(33.2)}{>} 0 \qquad = \underbrace{\frac{1}{\alpha_a^2 + \beta_a^2} \begin{pmatrix} \alpha_a & \beta_a \\ -\beta_a & \alpha_a \end{pmatrix}}_{= A_a^{-1}} \begin{pmatrix} \gamma_a \\ s \end{pmatrix}$$

d.h. γ_a und s bestimmen $u(a)$ und $u'(a)$ eindeutig.

Bezeichne: $u(x; s)$ nun die eindeutige Lösung von (33.4)

& $S := \{ s \in \mathbb{R} \mid \text{Lösung } u(x;s) \text{ von (33.4) existiert } \forall x \in [a,b] \}$ (vorzeitiger blow up ausgeschlossen)

(33.5) Schießmethode: Finde $\bar{s} \in S$ mit $\boxed{g(\bar{s}) = 0}$, wobei

(33.6) $$\boxed{g(s) := \alpha_b u(b; s) + \beta_b u'(b; s) - \gamma_b} \overset{!}{=} 0$$

2. (33.4) $\Rightarrow$ (33.1): Sei $u(x;s)$ Lösung von (33.4) & $\bar{s} \in S$ Lösung von (33.5), dann löst $u(x;\bar{s})$ (33.1).

(33.1) $\Rightarrow$ (33.4): Sei $u(x)$ Lösung von (33.1), dann gilt für $\bar{s} := \beta_a u(a) + \alpha_a u'(a)$: $\bar{s} \in S$ und $g(\bar{s}) = 0$, d.h. aber $u(x)$ löst (33.4) für $s = \bar{s}$.

Zu (b): Wähle den Ansatz

$$\boxed{v(x;s) := \frac{\partial}{\partial s} u(x;s)} \quad , u(x;s) \text{ Lösung von (33.4)}, \; s \in \mathbb{R}$$

und leite ein AWP für v her:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x;s) = \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x;s) \underset{(33.4)}{=} \frac{\partial}{\partial s} f(x, u(x;s))$$

$$= f_u(x, u(x;s)) \cdot \frac{\partial}{\partial s} u(x;s) = f_u(x, u(x;s)) \cdot v(x;s)$$

$$\begin{pmatrix} v(a;s) \\ v_x(a;s) \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial s}\begin{pmatrix} u(a;s) \\ u_x(a;s) \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{1}{\alpha_a^2+\beta_a^2}\cdot\begin{pmatrix} \alpha_a & \beta_a \\ -\beta_a & \alpha_a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_a \\ s \end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{\alpha_a^2+\beta_a^2}\cdot\begin{pmatrix} \alpha_a & \beta_a \\ -\beta_a & \alpha_a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha_a^2+\beta_a^2}\cdot\begin{pmatrix} \beta_a \\ \alpha_a \end{pmatrix}$$

Insgesamt erhalten wir für $s \in \mathbb{R}$ das AWP

$$(33.7) \quad \boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x;s) = f_u(x, u(x;s))\, v(x;s) && , x \in [a, T[\\ &\begin{pmatrix} v(a;s) \\ v_x(a;s) \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha_a^2+\beta_a^2}\cdot\begin{pmatrix} \beta_a \\ \alpha_a \end{pmatrix} && , x = a \end{aligned}}$$

Weiter gilt

$$g'(s) = \frac{\partial}{\partial s} g(s) \underset{(33.6)}{=} \frac{\partial}{\partial s}\left[\alpha_b u(b;s) + \beta_b u_x(b;s) - \gamma_b\right]$$

$$= \alpha_b v(b;s) + \beta_b v_x(b;s), \qquad s \in \mathbb{R}.$$

D.h. g' an der Stelle s erhalten wir, indem wir zunächst das AWP (33.4) und anschließend das AWP (33.7) für das entsprechende s lösen, d.h.

$\underset{\text{wählen}}{s \in \mathbb{R}} \Rightarrow$ (33.4) lösen $\Rightarrow$ (33.7) lösen $\Rightarrow g'(s)$.

Aufgabe 34:

Gegeben: $p, q, r \in C([a,b], \mathbb{R})$, Lineares RWP 2. Ordnung

$$(34.1) \quad \boxed{\begin{aligned} &[Lu](x) := u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = r(x) \quad , x \in [a,b] \\ &Ru := \begin{pmatrix} \alpha_a u(a) + \beta_a u'(a) \\ \alpha_b u(b) + \beta_b u'(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_a \\ \gamma_b \end{pmatrix} =: \gamma \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}}$$

Zeige (unter Verwendung der Fredholmschen Alternative für lineare DGLen 1. Ordnung), dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i): (34.1) besitzt für $r \equiv 0$ und $\gamma = 0$ nur die Lösung $u \equiv 0$ (triviale Lösung)

(ii): $\begin{pmatrix} \alpha_a & \beta_a \\ \alpha_b y_1(b) + \beta_b y_1'(b) & \alpha_b y_2(b) + \beta_b y_2'(b) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$ ist invertierbar

wobei

y_1 Lösung von $\begin{aligned} &Ly_1 = 0 \\ &y_1(a) = 1, y_1'(a) = 0 \end{aligned}$ und y_2 Lösung von $\begin{aligned} &Ly_2 = 0 \\ &y_2(a) = 0, y_2'(a) = 1 \end{aligned}$

(iii) : $\forall r \in C([a,b],\mathbb{R})\ \forall \gamma \in \mathbb{R}^2\ \exists_1 u \in C^2([a,b],\mathbb{R}) :$ u löst (34.1)

Lösung: 1. Transformation auf System 1. Ordnung :

Ansatz: $\boxed{\begin{aligned} u &=: v_1 \\ u' &=: v_2 \end{aligned}}$

Daraus erhalten wir (für die DGL in (34.1))

$$v_1' = u' = v_2$$
$$v_2' = u'' \underset{(34.1)}{=} r - pu' - qu = r - pv_2 - qv_1$$

und somit $v := \binom{v_1}{v_2}$

(34.2) $$v' = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} v_2 \\ r - pv_2 - qv_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix}}_{=:\hat{A} = \hat{A}(x)} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix}}_{=:\hat{r} = \hat{r}(x)}$$

$$= \hat{A}(x)v + \hat{r}(x), \quad x \in [a,b].$$

Weiter erhalten wir (für die RB in (34.1))

$$\begin{pmatrix} \gamma_a \\ \gamma_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_a u(a) + \beta_a u'(a) \\ \alpha_b u(b) + \beta_b u'(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_a v_1(a) + \beta_a v_2(a) \\ \alpha_b v_1(b) + \beta_b v_2(b) \end{pmatrix}$$

und somit

(34.3) $$R_a v(a) + R_b v(b) = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_a & \beta_a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=:R_a \in \mathbb{R}^{2,2}} \begin{pmatrix} v_1(a) \\ v_2(a) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_b & \beta_b \end{pmatrix}}_{=:R_b \in \mathbb{R}^{2,2}} \begin{pmatrix} v_1(b) \\ v_2(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_a \\ \gamma_b \end{pmatrix} = \gamma.$$

Insgesamt erhalten wir aus (34.2) und (34.3) das folgende lineare RWP 1. Ordnung

(34.4) $$\boxed{\begin{aligned} & v' = \hat{A}(x)v + \hat{r}(x), \quad x \in [a,b] \\ & R_a v(a) + R_b v(b) = \gamma \in \mathbb{R}^2 \\ & \text{mit } \hat{A}(x) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(x) & -p(x) \end{pmatrix}, \quad \hat{r}(x) := \begin{pmatrix} 0 \\ r(x) \end{pmatrix} \end{aligned}}$$

Wegen $p, q, r \in C([a,b],\mathbb{R})$ gilt

(34.5) $$\hat{A} \in C([a,b],\mathbb{R}^{2,2}) \quad \text{und} \quad \hat{r} \in C([a,b],\mathbb{R}^2).$$

2. Wegen (34.5) können wir Satz 4.1 anwenden: Demzufolge gilt die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(1) : (34.4) besitzt für $\hat{r} \equiv 0$ und $\gamma \equiv 0$ nur die Lösung $v \equiv 0$ (triviale Lösung)

(34.6) (2): $R_a + R_b Y(b)$ invertierbar, $Y(x)$ (normierte Fundamentalmatrix) Lösung von $\begin{matrix} Y' = \hat{A}(x)Y \\ Y(a) = I \end{matrix}$

(3): $\forall \hat{r} \in C([a,b],\mathbb{R}^2)\ \forall \gamma \in \mathbb{R}^2\ \exists_1 v \in C^1([a,b],\mathbb{R}^2) :$ v löst (34.4)

Es bleibt zu verifizieren, dass

$$(i) \Leftrightarrow (1), \quad (ii) \Leftrightarrow (2), \quad (iii) \Leftrightarrow (3).$$

(Diese folgen größtenteils direkt aus dem obigen Ansatz)

(i) $\Leftrightarrow$ (1):

„$\Rightarrow$": $u(x)$ löse (34.1) mit $r \equiv 0$ und $\gamma = 0$

$\Rightarrow v(x) := \begin{pmatrix} u(x) \\ u'(x) \end{pmatrix}$ löst (34.4) mit $\hat{r} \equiv 0$ und $\gamma = 0$.

„$\Leftarrow$": $v(x)$ löse (34.4) mit $\hat{r} \equiv 0$ und $\gamma = 0$.

$\Rightarrow u(x) := v_1(x)$ löst (34.1) mit $r \equiv 0$ und $\gamma = 0$.

Ang $\exists u$ nicht-triviale lsg. (...)

Ang. $\exists v$ nicht triv. Lösung von (34.4) $\Rightarrow v_1$ löst (34.1) $v(x) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ und v_1 nicht-triv. $\lightning$ zu (i).

(ii) $\Leftrightarrow$ (2):

Es gilt

$$\begin{pmatrix} \alpha_a & \beta_a \\ \alpha_b y_1(b) + \beta_b y_1'(b) & \alpha_b y_2(b) + \beta_b y_2'(b) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_a & \beta_a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_b & \beta_b \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1(b) & y_2(b) \\ y_1'(b) & y_2'(b) \end{pmatrix}}_{=: Y(b)} = R_a + R_b Y(b)$$

d.h. die linke Matrix ist genau dann invertierbar, wenn $R_a + R_b Y(b)$ invertierbar ist. Weiter gilt: Die Fundamentalmatrix

$$Y(x) = \begin{pmatrix} Y_{11}(x) & Y_{12}(x) \\ Y_{21}(x) & Y_{22}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}$$

löst

$$Y'(x) = \tilde{A}(x) Y(x)$$
$$Y(a) = I$$

genau dann wenn $y_1(x) = Y_{11}(x)$ und $y_2 = Y_{12}(x)$ lösen

$$[Ly_1](x) = 0, \quad y_1(a) = 1, \quad y_1'(a) = 0 \qquad \text{und} \qquad [Ly_2](x) = 0, \quad y_2(a) = 0, \quad y_2'(a) = 1.$$

(iii) $\Leftrightarrow$ (3): ähnlich wie in (i) $\Leftrightarrow$ (1).

Zusatz: Untersuchen Sie die Lösbarkeit der RWAen

(a): $u'' - u' - 2u = 0$, $x \in [0,1]$

$u(0) + u'(0) = 1$

$u(1) = 0$

$a = 0, b = 1$

$p(x) = -1$, $q(x) = -2$, $r(x) = 0$

$\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 1$, $\gamma_0 = 1$

$\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 0$, $\gamma_1 = 0$

(b): $u'' + u = 0$, $x \in [0,\pi]$

$u(0) = \gamma_0$

$u(\pi) = \gamma_\pi$

$p(x) = 1$, $q(x) = 0$, $r(x) = 0$

$\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 0$, $\gamma_0 = \gamma_0$

$\alpha_\pi = 1$, $\beta_\pi = 0$, $\gamma_\pi = \gamma_\pi$

$a = 0$, $b = \pi$

Lösung: Idee: Überprüfe (2) aus (34.6).

zu (a): 1. (System 1. Ordnung): (vgl. (34.4))

(34.7)
$$\boxed{\begin{aligned} &v' = \hat{A}(x) v, \quad x \in [0,1] \\ &R_0 v(0) + R_1 v(1) = \gamma \\ &\text{mit} \quad \hat{A}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \; R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; \gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\text{konstant!} \end{aligned}}$$

2. (Fundamentallösung): $\hat{A}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \hat{A}$, $Y' = \hat{A}Y$, $Y(a) = I_2$

- (Charakteristisches Polynom bestimmen):

$$\det(\hat{A} - \lambda I_2) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda-1) - 2 = (\lambda+1)(\lambda-2)$$

- (Eigenwerte bestimmen): ($\rightsquigarrow$ Nullstellen des charak. Polynoms)

$$(\lambda+1)(\lambda-2) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1 , \lambda_2 = 2$$

- (Eigenvektoren bestimmen): ($\rightsquigarrow (\hat{A} - \lambda_i I_2)v_i = 0$)

i) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (\hat{A} - \lambda_1 I_2)v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} v_1 \Longleftrightarrow v_1 \in \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

ii) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (\hat{A} - \lambda_2 I_2)v_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} v_2 \Longleftrightarrow v_2 \in \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

- (Transformationsmatrix bestimmen):

$$\hat{A} = S \cdot D \cdot S^{-1}$$

mit

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (Fundamentallösung bestimmen):

$$Y(x) := e^{\hat{A}(x-a)} = e^{SDS^{-1}(x-a)} = S\, e^{D(x-a)} S^{-1}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-(x-a)} & 0 \\ 0 & e^{2(x-a)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2e^{-(x-a)} + e^{2(x-a)} & -e^{-(x-a)} + e^{2(x-a)} \\ -2e^{-(x-a)} + 2e^{2(x-a)} & e^{-(x-a)} + 2e^{2(x-a)} \end{pmatrix}$$

3. Wir überprüfen nun (2) aus (34.6): $a = 0$, $b = 1$

$$R_0 + R_1 Y(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2e^{-1}+e^2 & -e^{-1}+e^2 \\ -2e^{-1}+2e^2 & e^{-1}+2e^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2e^{-1}+e^2 & -e^{-1}+e^2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2e^{-1}+e^2 & -e^{-1}+e^2 \end{pmatrix} \quad \text{invertierbar!}$$

(denn: $\det(R_0 + R_1 Y(1)) = \frac{1}{3}(-e^{-1}+e^2) - \frac{1}{3}(2e^{-1}+e^2) = -e^{-1} \neq 0$)

Damit ist (2) erfüllt und nach (3) ist (34.7) eindeutig lösbar. Damit ist das RWP aus (a) eindeutig lösbar, nach (iii).

<u>zu (b)</u>: Idee: Überprüfe (ii):

1. Die Lösungen y_1, y_2 von

$$\begin{aligned} y_1'' + y_1 &= 0 \\ y_1(0) &= 1 \\ y_1'(0) &= 0 \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} y_2'' + y_2 &= 0 \\ y_2(0) &= 0 \\ y_2'(0) &= 1 \end{aligned}$$

sind durch

$$y_1(x) = \cos(x) \quad \text{und} \quad y_2(x) = \sin(x)$$

gegeben. ~~den Lösungsraum auf.~~

2. Mit $a = 0$, $b = \pi$, $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 0$, $\alpha_\pi = 1$ und $\beta_\pi = 0$ erhalten wir

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \alpha_\pi \underbrace{y_1(\pi)}_{=-1} + \beta_\pi \underbrace{y_1'(\pi)}_{=0} & \alpha_\pi \underbrace{y_2(\pi)}_{=0} + \beta_\pi \underbrace{y_2'(\pi)}_{=-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

nicht invertierbar!

Damit ist das RWP aus (b) <u>nicht eindeutig</u> <u>lösbar</u>, nach (iii).

Überprüfe (i):

3. Das homogene RWP ($\gamma_0 = \gamma_\pi = 0$) ist lösbar, aber nicht eindeutig lösbar, denn die Lösungen sind durch

$$\boxed{u(x) = \alpha \sin(x), \quad \alpha \in \mathbb{R}}$$

gegeben (Verwende dazu den Ansatz $u(x) = \alpha \sin(x) + \beta \cos(x)$ und setze diesen in (b) ein).

Überprüfe (iii)

4. Das inhomogene RWP aus (b) ist genau dann lösbar, wenn die Bedingung

$$\boxed{\gamma_0 = -\gamma_\pi}$$

erfüllt ist. (Verwende Ansatz aus 3.). Die Lösung ist dann aber nicht eindeutig, denn die Lösungen sind durch

$$\boxed{u(x) = \alpha \sin(x) + \gamma_0 \cos(x)}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

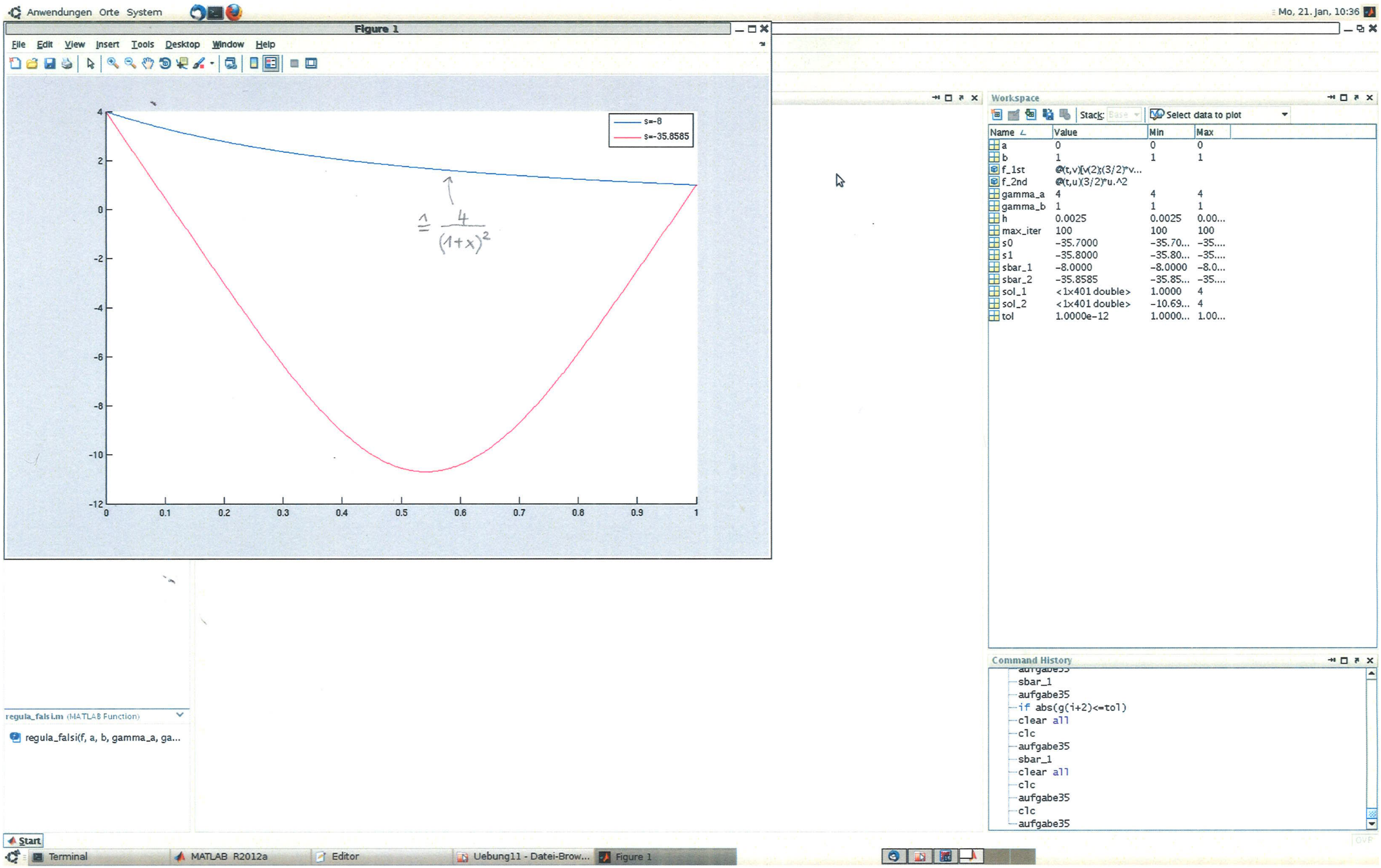
gegeben.

```
% Aufgabe 35
% Initialisierung (Randwertaufgabe)
f_2nd = @(t,u) (3/2)*u.^2;              % right hand side of 2. order BVP
a = 0;
b = 1;
gamma_a = 4;
gamma_b = 1;
f_1st = @(t,v) [v(2);(3/2)*v(1)^2]; % right hand side of 1. order IVP

% Initialisierung (Schießsvervahren)
tol = 10^(-12);
max_iter = 100;
h = 1/400;

%% 1. Durchlauf: Berechnung der 1. Loesung
s0=-7.9;
s1=-8;
[sbar_1,sol_1]=shooting_method(f_1st,a,b,gamma_a,gamma_b,s0,s1,tol,max_iter,h);

%% 2. Durchlauf: Berechnung der 2. Loesung
s0=-35.7;
s1=-35.8;
[sbar_2,sol_2]=shooting_method(f_1st,a,b,gamma_a,gamma_b,s0,s1,tol,max_iter,h);

%% Graphische Ausgabe
figure;
hold on
plot(a:h:b,sol_1,'b');
plot(a:h:b,sol_2,'r');
hold off
legend(['s=' num2str(sbar_1)],['s=' num2str(sbar_2)]);
```

sbar_1 = −8.0000000001694
sbar_2 = −35.858548836966

```
function [sbar,sol] = shooting_method(f,a,b,gamma_a,gamma_b,s0,s1,tol,max_iter,
h)
%SHOOTING_METHOD

  %% Initialisierung
  % Verfahren zur Zeitdiskretisierung (Klassisches Runge-Kutta-Verfahren)
  t_init = a;
  t_end = b;
  alpha=[0 1/2 1/2 1];
  beta=[0 0 0 0;1/2 0 0 0;0 1/2 0 0;0 0 1 0];
  gamma=[1/6 1/3 1/3 1/6];

  % Parameter fuer die 'regula falsi'-Iteration
  s=10*ones(1,max_iter);
  s(1)=s0;
  s(2)=s1;
  g=zeros(1,max_iter);
  [~,vn]=rk_explicit(f,[gamma_a;s(1)],t_init,t_end,h,alpha,beta,gamma);
  g(1)=vn(1,end)-gamma_b;
  [~,vn]=rk_explicit(f,[gamma_a;s(2)],t_init,t_end,h,alpha,beta,gamma);
  g(2)=vn(1,end)-gamma_b;
  i = 0;

  %% Regula falsi
  while (abs(g(i+2))>=tol && i<max_iter)
    s(i+3) = s(i+2) - g(i+2)*(s(i+2)-s(i+1))/(g(i+2)-g(i+1));
    [~,vn]=rk_explicit(f,[gamma_a;s(i+3)],t_init,t_end,h,alpha,beta,gamma);
    g(i+3) = vn(1,end)-gamma_b;
    i = i+1;
  end
  % Test, ob maximale Anzahl an Iterationen erreicht wurde:
  if i==max_iter
    error('Regula falsi: Maximal number of iteration reached.');
  end

  sbar=s(i+2);
  sol=vn(1,:);

end
```

```
function [tn,un] = rk_explicit(f,u_init,t_init,t_end,h,alpha,beta,gamma)
%RK_EXPLICIT loest Anfangswertprobleme der Form
%               u'(t) = f(t,u(t)), u(t_init) = u_init
%             mit expliziten Runge-Kutta Verfahren (alpha,beta,gamma)
%             zur konstanten Zeitschrittweite h auf dem endlichen
%             Zeitintervall [t_init,t_end].

%% Initialisierung
  m=length(gamma);                    % Stufe des RK-Verfahrens
  tn=t_init:h:t_end;                  % diskretes Zeitintervall
  time_steps=length(tn);              % Anzahl der Zeitschritte
  space_dim=length(u_init);           % Dimension der DGL, Raumdimension
  un=zeros(space_dim,time_steps);     % Speicherreservierung fuer RK-Iteration
  un(:,1)=u_init;                     % Initialisierung der Anfangsdaten
  k=zeros(space_dim,m);               % Speicherreservierung der k_i's

%% Explizites Runge-Kutta-Verfahren
  for j=2:time_steps
    % 1. Rekursive Berechnung der k_i's
    for i=1:m
      temp_k=zeros(space_dim,1);
      for l=1:i-1
        temp_k=temp_k+beta(i,l)*k(:,l);
      end
      k(:,i)=f(tn(j-1)+alpha(i)*h,un(:,j-1)+h*temp_k);
    end

    % 2. Berechnung der u^j's
    temp_phi=zeros(space_dim,1);
    for i=1:m
      temp_phi=temp_phi+gamma(i)*k(:,i);
    end
    un(:,j)=un(:,j-1)+h*temp_phi;
  end
end
```


Anwendungen Orte System
Mo, 21. Jan, 10:36
Figure 1
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
s=-8
s=-35.8585
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-12
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
$\hat{=} \frac{4}{(1+x)^2}$
Workspace
Stack: Base
Select data to plot
Name
Value
Min
Max
a 0 0 0
b 1 1 1
f_1st @(t,v)[v(2);(3/2)*v...
f_2nd @(t,u)(3/2)*u.^2
gamma_a 4 4 4
gamma_b 1 1 1
h 0.0025 0.0025 0.00...
max_iter 100 100 100
s0 -35.7000 -35.70... -35....
s1 -35.8000 -35.80... -35....
sbar_1 -8.0000 -8.0000 -8.0...
sbar_2 -35.8585 -35.85... -35....
sol_1 <1x401 double> 1.0000 4
sol_2 <1x401 double> -10.69... 4
tol 1.0000e-12 1.0000... 1.00...
Command History
sbar_1
aufgabe35
if abs(g(i+2)<=tol)
clear all
clc
aufgabe35
sbar_1
clear all
clc
aufgabe35
clc
aufgabe35
regula_falsi.m (MATLAB Function)
regula_falsi(f, a, b, gamma_a, ga...
Start
Terminal
MATLAB R2012a
Editor
Uebung11 - Datei-Brow...
Figure 1