Aufgaben zur Vorlesung
Numerik II
Wintersemester 2012/13
Übungsblatt 12

W.–J. Beyn
D. Otten

Abgabe: Mittwoch, 23.01.2013, vor Beginn der Übung

Übung: Mi. 12:15–13:45, V5-148

Aufgabe 36: [Transformation auf Systeme 1. Ordnung]

Transformieren Sie ein System von Randwertaufgaben 2. Ordnung

$$u''(x) = f(x, u(x), u'(x)),\ x \in [a,b], \quad u(x) \in \mathbb{R}^n, \quad f : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

mit

a) Dirichlet-Randbedingungen: $u(a) = \gamma_a$, $u(b) = \gamma_b$,

b) Neumann-Randbedingungen: $u'(a) = u'(b) = 0$,

c) periodischen Randbedingungen: $u(a) = u(b)$, $u'(a) = u'(b)$

in ein $2n$-dimensionales System 1. Ordnung der Gestalt

$$\begin{aligned} v'(x) &= g(x, v(x)),\ x \in [a,b], \\ R_a v(a) + R_b v(b) &= \Gamma. \end{aligned}$$

Geben Sie jeweils g, R_a, R_b und Γ an.

(6 Punkte)

Aufgabe 37: [Reguläre Lösung]

Die Lösung $\bar{u} \in C^2([a,b], \mathbb{R})$ einer Randwertaufgabe 2. Ordnung

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x, u(x)),\ x \in [a,b], \\ \alpha_a u(a) - \beta_a u'(a) &= \gamma_a, \\ \alpha_b u(b) - \beta_b u'(b) &= \gamma_b \end{aligned}$$

heißt **regulär**, wenn $(\bar{u}, \bar{u}')$ eine reguläre Lösung des entsprechenden 2-dimensionalen Randwertproblems 1. Ordnung ist (vgl. Definition 4.4).
Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist die Nulllösung der Randwertaufgabe

$$-u''(x) = \lambda \sin(u(x)),\ x \in [0,1], \quad u'(0) = 0, \quad u(1) = 0$$

regulär?

(6 Punkte)

Aufgabe 38: [Klassisches Differenzenverfahren]

Berechnen Sie die beiden Lösungen des Randwertproblems aus Aufgabe 35

$$u'' = \frac{3}{2}u^2, \; x \in [0,1], \quad u(0) = 4, \quad u(1) = 1$$

numerisch mit dem klassischen Differenzenverfahren zu den Schrittweiten $h_i = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^i$, $i = 0, \ldots, 6$.

Verwenden Sie zur Lösung der nichtlinearen Gleichungssysteme das Newton-Verfahren. Wählen Sie dabei als Abbruchkriterium

$$\left\| u^{(k+1)} - u^{(k)} \right\| \leqslant \mathrm{tol} = 10^{-12}$$

und als Startvektor die Gitterfunktion zu

$$\bar{u}^{(1)}(x) = \frac{4}{(1+x)^2} \quad \text{(exakte Lösung)}$$

bzw. zu der Parabel $\bar{u}^{(2)}(x)$ mit den Daten

$$u(0) = 4, \; u\left(\frac{1}{2}\right) = -11, \; u(1) = 1.$$

a) Berechnen Sie für die erste Lösung die Konvergenzfehler

$$\varphi(h_i) = \left\| \bar{u}^{(1)}\big|_{\Omega_{h_i}} - u_{h_i} \right\|_\infty, \; i = 0, \ldots, 6$$

und schätzen Sie die Konvergenzordnung nach Aufgabe 31.

b) Bestimmen Sie für den Funktionswert $u_h\left(\frac{1}{2}\right)$ der zweiten Lösung die experimentelle Konvergenzordnung EOC $\left(h, \frac{1}{2}h, \frac{1}{4}h\right)$ wie in Aufgabe 18.

Senden Sie Ihr Programm per Email an dotten@math.uni-bielefeld.de.

(6 Punkte)

Numerik II
Übungsblatt 12
Lösungen

Aufgabe 36:

Transformieren Sie ein System von RWA'en 2. Ordnung

$$u''(x) = f(x, u(x), u'(x)) \quad , x \in [a,b],$$

($u: [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $f: [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$) mit

a) Dirichlet-Randbedingungen:
$$u(a) = \gamma_a \quad , \quad u(b) = \gamma_b \qquad , \gamma_a, \gamma_b \in \mathbb{R}^n$$

b) Neumann-Randbedingungen:
$$u'(a) = u'(b) = 0$$

c) periodische-Randbedingungen:
$$u(a) = u(b) \quad , \quad u'(a) = u'(b)$$

in ein $2n$-dimensionales System 1. Ordnung der Gestalt

$$v'(x) = g(x, v(x)) \quad , x \in [a,b],$$
$$R_a v(a) + R_b v(b) = \Gamma$$

($v: [a,b] \to \mathbb{R}^{2n}$, $g: [a,b] \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$, $R_a, R_b \in \mathbb{R}^{2n,2n}$, $\Gamma \in \mathbb{R}^{2n}$).

Geben Sie jeweils g, R_a, R_b und Γ an.

Lösung:

1. Transformation der RWA:

ANSATZ: $\boxed{v_1(x) := u(x) \quad , \quad v_2(x) := u'(x)}$

Dann löst $v(x) := \begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{pmatrix}$

$$v'(x) = \begin{pmatrix} v_1'(x) \\ v_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'(x) \\ u''(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'(x) \\ f(x, u(x), u'(x)) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} v_2(x) \\ f(x, v_1(x), v_2(x)) \end{pmatrix} =: g(x, v(x)).$$

2. Transformation der Randbedingungen:

zu a) Dirichlet-Randbedingungen: Mit obiger Transformation gilt

$$\gamma_a = u(a) = v_1(a) \quad , \quad \gamma_b = u(b) = v_1(b)$$

und somit

$$R_a v(a) + R_b v(b) := \underbrace{\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=: R_a} \begin{pmatrix} v_1(a) \\ v_2(a) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_n & 0 \end{pmatrix}}_{=: R_b} \begin{pmatrix} v_1(b) \\ v_2(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_a \\ \gamma_b \end{pmatrix} =: \Gamma$$

zu b) Neumann-Randbedingungen: Mit obiger Transformation gilt

$$0 = u'(a) = v_2(a) \quad , \quad 0 = u'(b) = v_2(b)$$

und somit

$$R_a v(a) + R_b v(b) := \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=:R_a} \begin{pmatrix} v_1(a) \\ v_2(a) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}}_{=:R_b} \begin{pmatrix} v_1(b) \\ v_2(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} =: \Gamma$$

zu c) periodische-Randbedingungen: Mit obiger Transformation gilt

$$v_1(a) = u(a) = u(b) = v_1(b) \,, \quad v_2(a) = u'(a) = u'(b) = v_2(b)$$

und somit

$$R_a v(a) + R_b v(b) := \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(a) \\ v_2(a) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(b) \\ v_2(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} =: \Gamma.$$

Aufgabe 37:

Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist die Nulllösung (d.h. $\bar{u} \equiv 0$) der RWA

$$(37.1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} -u''(x) = \lambda \sin(u(x)) & , \; x \in [0,1] \\ u'(0) = 0 & \\ u(1) = 0 & \end{array} \right\}$$

regulär?

Definition: Eine Lösung $\bar{u} \in C^2([a,b],\mathbb{R})$ der RWA 2. Ordnung

$$-u''(x) = f(x,u(x)) \quad , \; x \in [a,b]$$
$$\alpha_a u(a) - \beta_a u'(a) = \gamma_a$$
$$\alpha_b u(b) - \beta_b u'(b) = \gamma_b$$

heißt regulär, wenn $(\bar{u}, \bar{u}')$ eine reguläre Lösung der entsprechenden 2-dimensionalen RWA 1. Ordnung ist (vgl. Definition 4.4 im Skript).

Lösung:

1. Transformation der RWA:

ANSATZ: $\boxed{v_1(x) := u(x) \;, \; v_2(x) := u'(x)}$

Dann löst $v(x) := \begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{pmatrix}$

$$(37.2) \quad \boxed{\begin{aligned} v'(x) &= \begin{pmatrix} v_1'(x) \\ v_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'(x) \\ u''(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'(x) \\ -\lambda \sin(u(x)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2(x) \\ -\lambda \sin(v_1(x)) \end{pmatrix} =: \tilde{f}(x, v(x)), \quad x \in [0,1] \\ g(v(0),v(1)) &:= R_0 v(0) + R_1 v(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(1) \\ v_2(1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v_2(0) \\ v_1(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'(0) \\ u(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}}$$

2. Linearisierung (bei $\bar{v} = \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \end{pmatrix}$): (vgl. (4.29) & (4.30))

$$(37.3) \quad \boxed{\begin{aligned} v'(x) &= D_v \tilde{f}(x, \bar{v}(x)) \cdot v(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda \cos(\bar{v}_1(x)) & 0 \end{pmatrix} v(x) \quad , \; x \in [0,1] \\ 0 &= \underbrace{D_1 g(\bar{v}(0), \bar{v}(1))}_{=R_0} \cdot v(0) + \underbrace{D_2 g(\bar{v}(0), \bar{v}(1))}_{=R_1} \cdot v(1) \\ &= R_0 v(0) + R_1 v(1) \end{aligned}}$$

3. Reguläre Lösung:

Per Definition gilt:

Lösung $\bar{u}\equiv 0$ von (37.1) ist regulär

$:\Longleftrightarrow$ Lösung $\bar{v}=\binom{\bar{u}}{\bar{u}'}=\binom{0}{0}$ von (37.2) ist regulär

$:\Longleftrightarrow$ Linearisierung (37.3) bei $\bar{v}=\binom{0}{0}$, also

(37.4) $$\boxed{\begin{aligned} v'(x) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix} v(x) =: A(\lambda)v(x) \quad , x\in[a,b], \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\equiv R_0} v(0) + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\equiv R_1} v(1), \end{aligned}}$$

$v:[a,b]\to\mathbb{R}^2$
$A(\lambda)\in\mathbb{R}^{2,2}$, $\lambda\in\mathbb{R}$
$R_0,R_1\in\mathbb{R}^{2,2}$

besitzt nur die triviale Lösung, $v\equiv 0$. Dies ist nun zu zeigen!

Um dies zu zeigen, gibt es verschiedene Möglichkeiten:

4. Möglichkeit 1: (Satz 4.1)

Idee: Nach Satz 4.1 besitzt die (homogene) RWA (37.4) nur die triviale Lösung $\bar{v}\equiv 0$ (Vgl. Satz 4.1 (i)), genau dann wenn

$$R_0+R_1Y(1)\in\mathbb{R}^{2,2}$$

invertierbar ist (Vgl. Satz 4.1 (ii)), wobei $Y(t)$ die Fundamentalmatrix bezeichnet.

Für $A(\lambda)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}$ gilt

$$Y(t)=e^{A(\lambda)t}=\begin{cases} \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{\lambda}t) & \frac{\sin(\sqrt{\lambda}t)}{\sqrt{\lambda}} \\ -\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}t) & \cos(\sqrt{\lambda}t) \end{pmatrix} & , \lambda>0 \\ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & , \lambda=0 \\ \begin{pmatrix} \frac{e^{t\sqrt{-\lambda}}+e^{-t\sqrt{-\lambda}}}{2} & \frac{e^{t\sqrt{-\lambda}}-e^{-t\sqrt{-\lambda}}}{2\sqrt{-\lambda}} \\ \frac{\sqrt{-\lambda}\cdot(e^{t\sqrt{-\lambda}}-e^{-t\sqrt{-\lambda}})}{2} & \frac{e^{t\sqrt{-\lambda}}+e^{-t\sqrt{-\lambda}}}{2} \end{pmatrix} & , \lambda<0 \end{cases} \quad , t\in\mathbb{R}.$$

Daraus schließen wir

$$R_0+R_1Y(1)=\begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \cos(\sqrt{\lambda}) & \frac{\sin(\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix} & , \lambda>0 \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & , \lambda=0 \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{e^{\sqrt{-\lambda}}+e^{-\sqrt{-\lambda}}}{2} & \frac{e^{\sqrt{-\lambda}}-e^{-\sqrt{-\lambda}}}{2\sqrt{-\lambda}} \end{pmatrix} & , \lambda<0 \end{cases}$$

Die Matrizen sind genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante von 0 verschieden ist:

$$\det(R_0+R_1Y(1))=\begin{cases} -\cos(\sqrt{\lambda}) \quad \begin{cases} =0 & , \text{falls } \sqrt{\lambda}\in\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\mid k\in\mathbb{Z}\} \\ \neq 0 & , \text{falls } \sqrt{\lambda}\notin\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\mid k\in\mathbb{Z}\} \end{cases} & , \lambda>0 \\ -1 \quad \neq 0 & , \lambda=0 \\ -\frac{e^{\sqrt{-\lambda}}+e^{-\sqrt{-\lambda}}}{2} \quad \neq 0 & , \lambda<0 \end{cases}$$

D.h. $\bar{u}\equiv 0$ ist regulär für $\lambda>0$ mit $\sqrt{\lambda}\notin\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\mid k\in\mathbb{Z}\}$, $\lambda=0$ und $\lambda<0$.

Hinweis: Im Fall $\lambda<0$ beachte, dass die Funktion

$$-\frac{e^{-x}+e^{x}}{2}, \quad x>0$$

streng monoton fallend ist, das Supremum -1 bei $x=0$ liegt und nur die komplexen Nullstellen

(37.5) $$x = \frac{1}{2} i\,(2\pi n+\pi), \quad n\in\mathbb{Z}$$
$$= i\cdot(2n+1)\frac{\pi}{2}, \quad n\in\mathbb{Z}$$

besitzt.

5. Möglichkeit 2:

- charakteristisches Polynom von $A(\lambda)$:
$$\det(A(\lambda)-\mu I_2) = \mu^2+\lambda = 0$$
- Eigenwerte:
$$\mu_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda} = \begin{cases} +i\sqrt{\lambda},\ -i\sqrt{\lambda} & ,\ \lambda>0 \\ 0,\ 0 & ,\ \lambda=0 \\ +\sqrt{-\lambda},\ -\sqrt{-\lambda} & ,\ \lambda<0 \end{cases}$$
- Eigenvektoren:
$$v_{1,2} = \begin{cases} \begin{pmatrix}1\\ i\sqrt{\lambda}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\ -i\sqrt{\lambda}\end{pmatrix} & ,\ \lambda>0 \\ \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}, & ,\ \lambda=0 \\ \begin{pmatrix}1\\ \sqrt{-\lambda}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\ -\sqrt{-\lambda}\end{pmatrix} & ,\ \lambda<0 \end{cases}$$
- allgemeine Lösung: (mittels Exponentialansatz)

■ $\lambda>0$:
$$v(x) = C_1\cdot e^{i\sqrt{\lambda}x}\begin{pmatrix}1\\ i\sqrt{\lambda}\end{pmatrix} + C_2\cdot e^{-i\sqrt{\lambda}x}\begin{pmatrix}1\\ -i\sqrt{\lambda}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v_1(x)\\ v_2(x)\end{pmatrix}, \quad C_1,C_2\in\mathbb{C}$$

Restriktion durch Randbedingungen: $v_2(0)=0$ & $v_1(1)=0$

$$i\sqrt{\lambda}\,(C_1-C_2)=0 \overset{}{\underset{\lambda>0}{\Longleftrightarrow}} C_1=C_2$$
$$e^{i\sqrt{\lambda}}C_1 + e^{-i\sqrt{\lambda}}C_2 = 0 \underset{C_1=C_2}{\Longrightarrow} C_1\cdot\underbrace{\left(e^{i\sqrt{\lambda}}+e^{-i\sqrt{\lambda}}\right)}_{\begin{cases} =0 & ,\ \sqrt{\lambda}\in\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\mid n\in\mathbb{Z}\} \\ \neq 0 & ,\ \sqrt{\lambda}\notin\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\mid n\in\mathbb{Z}\}\end{cases}} = 0$$

vgl. (37.5)

C_1 beliebig $\Uparrow$; $\Downarrow$ $C_1=C_2=0$

somit ist $\bar{u}\equiv 0$ regulär, falls $\lambda>0$ & $\sqrt{\lambda}\notin\{(2n+1)\frac{\pi}{2} \mid n\in\mathbb{Z}\}$.
Für $\lambda>0$ mit $\sqrt{\lambda}\in\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\mid n\in\mathbb{Z}\}$ ist $\bar{u}\equiv 0$ nicht regulär.

■ $\lambda<0$:
$$v(x) = C_1\cdot e^{\sqrt{-\lambda}x}\cdot\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{-\lambda}\end{pmatrix} + C_2\cdot e^{-\sqrt{-\lambda}x}\cdot\begin{pmatrix}1\\ -\sqrt{-\lambda}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v_1(x)\\ v_2(x)\end{pmatrix}, \quad C_1,C_2\in\mathbb{C}$$

Restriktion durch Randbedingungen: $v_2(0)=0$, $v_1(1)=0$

$$\sqrt{-\lambda}\,(C_1-C_2)=0 \underset{\lambda<0}{\Longleftrightarrow} C_1=C_2$$
$$e^{\sqrt{-\lambda}}C_1 + e^{-\sqrt{-\lambda}}C_2 = 0 \underset{C_1=C_2}{\Longrightarrow} C_1\underbrace{\left(e^{\sqrt{-\lambda}}+e^{-\sqrt{-\lambda}}\right)}_{\neq 0,\ \text{da } \lambda<0 \Rightarrow \sqrt{-\lambda}\in\mathbb{R}} = 0 \Longrightarrow C_1=0 \underset{C_1=C_2}{\Longrightarrow} C_2=0$$

(da $=0$, falls $\sqrt{\lambda}\in\{i\cdot(2n+1)\frac{\pi}{2}\mid n\in\mathbb{Z}\}$

somit $v\equiv 0$. D.h. $\bar{u}\equiv 0$ ist regulär für alle $\lambda<0$.

■ $\lambda=0$:
$$v(x) = C_1\cdot\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} + C_2\cdot\begin{pmatrix}x+1\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v_1(x)\\ v_2(x)\end{pmatrix}, \quad C_1,C_2\in\mathbb{C}$$

Restriktion durch Randbedingungen: $v_2(0)=0$, $v_1(1)=0$

$$C_2 = 0$$
$$C_1+2C_2 = 0 \underset{C_1=0}{\Longrightarrow} C_2=0$$

somit $v\equiv 0$. D.h. $\bar{u}\equiv 0$ ist regulär für $\lambda=0$.

Aufgabe 38:

```
%% Aufgabe 38
% Initialisierung (der RWA)
a = 0;
b = 1;
alpha_a = 1;
alpha_b = 1;
beta_a  = 0;
beta_b  = 0;
gamma_a = 4;
gamma_b = 1;
f   = @(x,u,v) -3/2*u.^2;
Duf = @(x,u,v) -3*u;
Dvf = @(x,u,v) 0;

alpha = [alpha_a;alpha_b];
beta  = [beta_a;beta_b];
gamma = [gamma_a;gamma_b];

% Initialisierung der Finite-Differenzen-Methode
q = 1/2;
h = 1/10*q.^(0:6);
len_h = length(h);
tol = 10^(-12);

init_1 = @(x) 4./(1+x).^2;        % exakte Loesung
init_2 = @(x) 54*x.^2-57*x + 4; % Parabel

% Berechnung der numerischen Loesungen
for i=1:len_h
    [xi{1,i},ui{1,i}] = finite_difference_method(f,Duf,Dvf,a,b,alpha,beta,↙
gamma,tol,h(i),init_1);
    [xi{2,i},ui{2,i}] = finite_difference_method(f,Duf,Dvf,a,b,alpha,beta,↙
gamma,tol,h(i),init_2);
end

%% Aufgabenteil 38 a)
% Berechnung des Fehlers
phi_1=zeros(len_h,1);
for i=1:len_h
  phi_1(i)=norm(init_1(xi{1,i})-ui{1,i},Inf);
end
% Berechnung der experimentellen Konvergenzordnung (EOC)
EOC_1=zeros(len_h,1);
for i=2:len_h
  EOC_1(i) = log(phi_1(i-1)/phi_1(i)) / log(h(i-1)/h(i));
end
% Ausgabe
fprintf('\n        Musterloesung zu Aufgabe 38, Numerik2, WS 2012/13\n\n')
fprintf('           h             phi(h)          exp. Konvergenzordnung\n')
fprintf('        ----------------------------------------------------------\n')
fprintf('Finite-Differenzen-Methode:\n')
fprintf('Aufgabe 38 a):\n')
fprintf('        %6.5f     %10.9e\n',h(1),phi_1(1))
for i = 2:len_h
  fprintf('        %6.5f     %10.9e     %10.9f\n',h(i),phi_1(i),EOC_1(i))
end
```

```
%% Aufgabenteil 38 b)
% Bestimmung der Indizes zu x=1/2
ind=zeros(len_h,1);
for i=1:len_h
  ind(i)=find(xi{1,i}==0.5);
end
% Berechnung der Differenz zwischen den numerischen Loesungen
err_2 = zeros(len_h-1,1);
for i=1:len_h-1
  err_2(i) = abs(ui{2,i}(ind(i))-ui{2,i+1}(ind(i+1)));
end
% Berechnung der experimentellen Konvergenzordnung (EOC)
EOC_2 = zeros(len_h-2,1);
for i=1:len_h-2
  EOC_2(i) = log(err_2(i+1)/err_2(i))/log(q);
end
% Ausgabe
fprintf('Aufgabe 38 b):\n')
fprintf('         %6.5f\n',h(1))
fprintf('         %6.5f     %10.9e\n',h(2),err_2(1))
for i = 1:len_h-2
  fprintf('         %6.5f     %10.9e     %10.9f\n',h(i+2),err_2(i+1),EOC_2(i))
end
```

```
function [xi,ui] = finite_difference_method(f,Duf,Dvf,a,b,alpha,beta,gamma,tol,
h,newton_init)
%FINITE-DIFFERENCE-METHOD computes the solution u:[a,b]->IR of
%     -u''(x) = f(x,u(x),u'(x)), x\in[a,b]
%     alpha_a*u(a) - beta_a*u'(a) = gamma_a
%     alpha_b*u(b) + beta_b*u'(b) = gamma_b
% with alpha_a, alpha_b, beta_a, beta_b, gamma_a, gamma_b \in IR satisfying
%     alpha_a^2+beta_a^2 > 0 , and   alpha_b^2+beta_b^2 > 0,
% continuous right hand side
%     f:[a,b] x IR x IR -> IR, (x,u,v)->f(x,u,v),
% and
%     alpha=[alpha_a;alpha_b] \in IR^2,
%     beta=[beta_a;beta_b]    \in IR^2,
%     gamma=[gamma_a;gamma_b] \in IR^2,
% by the 'finite-difference-method'. This method uses the approximations
%     u_xx(x_i) ~ 1/h^2*(u(x_i-h)-2*u(x_i)+u(x_i+h))
%      u_x(x_i) ~ 1/(2*h)*(u(x_i+h)-u(x_i-h)).

  %% Test for 'well-posedness'
  % of the seperated boundary conditions (Sturm-Liouvill-b.c.)
  if alpha(1)^2+beta(1)^2==0 || alpha(2)^2+beta(2)^2==0
    error('Boundary value problem not well posed due to the boundary
conditions');
  end

  %% Initialization
  % Initializing mesh (for Sturm-Liouville boundary conditions)
  xi = a:h:b;          % discretization of the 1D-domain [a,b]
  M=length(xi)-1;      % M+1 mesh points
  if beta(1)~=0
    xi = [a-h xi];     % extend mesh to the left if beta_a ~= 0
  end
  if beta(2)~=0
    xi = [xi b+h];     % extend mesh to the right if beta_b ~= 0
  end
  % Initializing nonlinear system for newton method
  if beta(1)~=0 && beta(2)~=0
     T = @(u) T_def_ab(u,xi,alpha,beta,gamma,M,h,f);
    dT = @(u) dT_def_ab(u,xi,alpha,beta,M,h,Duf,Dvf);
  elseif beta(1)~=0 && beta(2)==0
     T = @(u) T_def_a(u,xi,gamma,M,h,f);
    dT = @(u) dT_def_a(u,xi,M,h,Duf,Dvf);
  elseif beta(1)==0 && beta(2)~=0
     T = @(u) T_def_b(u,xi,gamma,M,h,f);
    dT = @(u) dT_def_b(u,xi,M,h,Duf,Dvf);
  else
     T = @(u) T_def(u,xi,alpha,gamma,M,h,f);
    dT = @(u) dT_def(u,xi,alpha,M,h,Duf,Dvf);
  end
  % Initial data for newton method
  u0 = newton_init(xi)';

  %% Solving the nonlinear system T(u)=0 by 'newton-method'
  [ui,n]=newton(T,dT,u0,tol);

  %% Output
```

```
  if beta(1)~=0 && beta(2)~=0
    ui = ui(2:end-1);
  elseif beta(1)~=0 && beta(2)==0
    ui = ui(2:end);
  elseif beta(1)==0 && beta(2)~=0
    ui = ui(1:end-1);
  else
    ui = ui;
  end
  xi=(a:h:b)';
end

%% Functions for Newtons method
% CASE 1: Seperated boundary conditions contain first order derivatives in a
and b
function v=T_def_ab(u,xi,alpha,beta,gamma,M,h,f)
  v=zeros(M+3,1);
  v(1) = alpha(1)*u(2)-beta(1)/(2*h)*(u(3)-u(1))-gamma(1);
  for i=2:M+2
    v(i) = -(u(i-1)-2*u(i)+u(i+1))/h^2 - f(xi(i),u(i),1/(2*h)*(u(i+1)-u(i-1)));
  end
  v(M+3) = alpha(2)*u(M+2)-beta(2)/(2*h)*(u(M+3)-u(M+1))-gamma(2);
end

function V=dT_def_ab(u,xi,alpha,beta,M,h,Duf,Dvf)
  V=zeros(M+3,M+3);
  V(1,1)=beta(1)/(2*h);
  V(1,2)=alpha(1);
  V(1,3)=-beta(1)/(2*h);
  for i=2:M+2
    V(i,i-1) = - 1/h^2 + Dvf(xi(i),u(i),1/(2*h)*(u(i+1)-u(i-1)))/(2*h); % a_i's
    V(i,i)   =   2/h^2 - Duf(xi(i),u(i),1/(2*h)*(u(i+1)-u(i-1)));        % b_i's
    V(i,i+1) = - 1/h^2 - Dvf(xi(i),u(i),1/(2*h)*(u(i+1)-u(i-1)))/(2*h); % c_i's
  end
  V(M+3,M+1)=-beta(2)/(2*h);
  V(M+3,M+2)=alpha(2);
  V(M+3,M+3)=beta(2)/(2*h);
  V=sparse(V);
end

% CASE 2: Seperated boundary conditions contain first order derivatives in a
function v=T_def_a(u,xi,alpha,beta,gamma,M,h,f)
  v=zeros(M+2,1);
  v(1) = alpha(1)*u(2)-beta(1)/(2*h)*(u(3)-u(1))-gamma(1);
  for i=2:M+1
    v(i) = -(u(i-1)-2*u(i)+u(i+1))/h^2 - f(xi(i),u(i),1/(2*h)*(u(i+1)-u(i-1)));
  end
  v(M+2) = u(M+2)-gamma(2);
end

function V=dT_def_a(u,xi,alpha,beta,M,h,Duf,Dvf)
  V=zeros(M+2,M+2);
  V(1,1)=beta(1)/(2*h);
  V(1,2)=alpha(1);
  V(1,3)=-beta(1)/(2*h);
  for i=2:M+1
```

```
      V(i,i-1)  = - 1/h^2 + Dvf(xi(i),u(i),1/(2*h)*(u(i+1)-u(i-1)))/(2*h); % a_i's
      V(i,i)    =   2/h^2 - Duf(xi(i),u(i),1/(2*h)*(u(i+1)-u(i-1)));         % b_i's
      V(i,i+1)  = - 1/h^2 - Dvf(xi(i),u(i),1/(2*h)*(u(i+1)-u(i-1)))/(2*h); % c_i's
    end
    V(M+2,M+2)=alpha(2);
    V=sparse(V);
  end

  % CASE 3: Seperated boundary conditions contain first order derivatives in b
  function v=T_def_b(u,xi,alpha,beta,gamma,M,h,f)
    v=zeros(M+2,1);
    v(1) = alpha(1)*u(1)-gamma(1);
    for i=2:M+1
      v(i) = -(u(i-1)-2*u(i)+u(i+1))/h^2 - f(xi(i),u(i),1/(2*h)*(u(i+1)-u(i-1)));
    end
    v(M+2) = alpha(2)*u(M+1)-beta(2)/(2*h)*(u(M+2)-u(M))-gamma(2);
  end

  function V=dT_def_b(u,xi,alpha,beta,M,h,Duf,Dvf)
    V=zeros(M+2,M+2);
    V(1,1)=alpha(1);
    for i=2:M+1
      V(i,i-1)  = - 1/h^2 + Dvf(xi(i),u(i),1/(2*h)*(u(i+1)-u(i-1)))/(2*h); % a_i's
      V(i,i)    =   2/h^2 - Duf(xi(i),u(i),1/(2*h)*(u(i+1)-u(i-1)));         % b_i's
      V(i,i+1)  = - 1/h^2 - Dvf(xi(i),u(i),1/(2*h)*(u(i+1)-u(i-1)))/(2*h); % c_i's
    end
    V(M+2,M)=-beta(2)/(2*h);
    V(M+2,M+1)=alpha(2);
    V(M+2,M+2)=beta(2)/(2*h);
    V=sparse(V);
  end

  % CASE 4: Seperated boundary conditions contain no first order derivatives
  function v=T_def(u,xi,alpha,gamma,M,h,f)
    v=zeros(M+1,1);
    v(1) = alpha(1)*u(1)-gamma(1);
    for i=2:M
      v(i) = -(u(i-1)-2*u(i)+u(i+1))/h^2 - f(xi(i),u(i),1/(2*h)*(u(i+1)-u(i-1)));
    end
    v(M+1) = alpha(2)*u(M+1)-gamma(2);
  end

  function V=dT_def(u,xi,alpha,M,h,Duf,Dvf)
    V=zeros(M+1,M+1);
    V(1,1)=alpha(1);
    for i=2:M
      V(i,i-1)  = - 1/h^2 + Dvf(xi(i),u(i),1/(2*h)*(u(i+1)-u(i-1)))/(2*h); % a_i's
      V(i,i)    =   2/h^2 - Duf(xi(i),u(i),1/(2*h)*(u(i+1)-u(i-1)));         % b_i's
      V(i,i+1)  = - 1/h^2 - Dvf(xi(i),u(i),1/(2*h)*(u(i+1)-u(i-1)))/(2*h); % c_i's
    end
    V(M+1,M+1)=alpha(2);
    V=sparse(V);
  end
```

```
function [nst,n]=newton(F,DF,x0,tol)
%NEWTON Mehrdimensionales Newton-Verfahren zur Berechnung von Nullstellen
%         einer Funktion F
%     F                  : Funktion
%     dF                 : Ableitung der Funktion
%     x0                 : Startwert
%     tol                : Genauigkeit
%     nst                : Nullstelle der Funktion
%     n                  : Anzahl der benoetigten Iterationen

%    n = 0;
%    xn = x0;
%    yn = F(xn);
%    while norm(yn)>tol
%      n = n+1;
%      %xn = xn - LR(dF(xn),yn,1);
%      xn = xn - DF(xn)\yn;
%      yn = F(xn);
%    end
%    nst=xn;

  n = 0;
  xn = x0;
  dn=1000;
  while norm(dn)>tol
    n = n+1;
    %dn = LR(DF(xn),F(xn),1);
    dn = DF(xn)\F(xn); % Alternativ: LR-Zerlegung fuer Bandmatrizen
    xn = xn - dn;
  end
  nst=xn;
end
```

```
 Musterloesung zu Aufgabe 38, Numerik2, WS 2012/13

           h             phi(h)          exp. Konvergenzordnung
       ----------------------------------------------------
Finite-Differenzen-Methode:
Aufgabe 38 a):
        0.10000     4.697021285e-03
        0.05000     1.189552593e-03     1.981327073
        0.02500     2.983742557e-04     1.995224091
        0.01250     7.470922402e-05     1.997764780
        0.00625     1.868124844e-05     1.999695506
        0.00313     4.670558638e-06     1.999923848
        0.00156     1.167657541e-06     1.999977906
Aufgabe 38 b):
        0.10000
        0.05000     3.466257134e-02
        0.02500     8.616013572e-03     2.008286253
        0.01250     2.149091461e-03     2.003293640
        0.00625     5.369388448e-04     2.000897197
        0.00313     1.342134164e-04     2.000228885
        0.00156     3.355201662e-05     2.000057509
```

Ergänzung zu Aufgabe 38:

- Bestimmung des Polynoms zu den Daten

$$u(0) = 4 \quad , \quad u(\tfrac{1}{2}) = -11, \quad u(1) = 1$$

Lösung:

ANSATZ: $\boxed{u(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c}$, $a, b, c \in \mathbb{C}$

Löse LGS

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und erhalte

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54 \\ -57 \\ 4 \end{pmatrix}$$

also $\quad u(x) = 54\,x^2 - 57x + 4$