

**Aufgaben zur Vorlesung**  
**Numerik II**  
Wintersemester 2012/13  
Übungsblatt 1

W.–J. Beyn  
D. Otten

**Abgabe: Mittwoch, 17.10.2012, vor Beginn der Vorlesung**

Übung: Mi. 12:15–13:45, V5-148

**Aufgabe 1:** [Lineare Differentialgleichungen]

Benutzen Sie die Theorie der linearen Anfangswertaufgaben, um die Lösungen der folgenden Aufgaben zu berechnen:

- a)  $u'(t) = -\alpha u(t) + t^2$ ,  $u(0) = \frac{1+2\alpha}{\alpha^4}$ ,  $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$ ,
- b)  $\begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,
- c)  $\begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .

(6 Punkte)

**Aufgabe 2:** [Existenz und Eindeutigkeit]

Betrachten Sie die Anfangswertaufgaben

- a)  $u'(t) = \sqrt{|t|} \cos^2(u(t))$ ,  $u(0) = u^0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ,
- b)  $u'(t) = \sqrt{|u(t)|} \sin^2(t)$ ,  $u(0) = u^0 > 0$ .

Zeigen Sie, dass die Nichtlinearität  $f$  in  $C^{0,1}(\Omega \times D, \mathbb{R})$  liegt, wenn man die offenen Intervalle  $\Omega$  und  $D$  geeignet wählt (wie?). Somit ist der lokale Existenz- und Eindeutigkeitssatz anwendbar. Berechnen Sie die Lösungen auf möglichst großen Existenzintervallen (Trennung der Veränderlichen).

(6 Punkte)

**Aufgabe 3:** [Richtungsfeld]

- a) Skizzieren Sie das Richtungsfeld (mindestens 15 Pfeile) der folgenden Differentialgleichung und markieren Sie die Lösungskurve, die durch den Punkt  $t = 1$ ,  $u = 3$  verläuft!  
 $u' = (1 - t^2)u$ ,  $t \in [0, 3]$ ,  $u \in [-1, 4]$ .
- b) Skizzieren Sie das projizierte Richtungsfeld der folgenden Differentialgleichung und markieren Sie die Bereiche, in denen waagerechte bzw. senkrechte Pfeile vorkommen.  
 $u_1' = u_1 u_2$ ,  
 $u_2' = u_2 - u_1$ ,  $u_1, u_2 \in [-1, 1]$ .

Für beide Aufgaben können Sie in MATLAB eine geeignete NUMLAB-GUI verwenden.

(6 Punkte)