

Aufgaben zur Vorlesung
Numerik II
Wintersemester 2012/13
Übungsblatt 1

W.–J. Beyn
D. Otten

Abgabe: Mittwoch, 17.10.2012, vor Beginn der Vorlesung

Übung: Mi. 12:15–13:45, V5-148

Aufgabe 1: [Lineare Differentialgleichungen]

Benutzen Sie die Theorie der linearen Anfangswertaufgaben, um die Lösungen der folgenden Aufgaben zu berechnen:

- a) $u'(t) = -\alpha u(t) + t^2$, $u(0) = \frac{1+2\alpha}{\alpha^4}$, $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$,
- b) $\begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$,
- c) $\begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

(6 Punkte)

Aufgabe 2: [Existenz und Eindeutigkeit]

Betrachten Sie die Anfangswertaufgaben

- a) $u'(t) = \sqrt{|t|} \cos^2(u(t))$, $u(0) = u^0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,
- b) $u'(t) = \sqrt{|u(t)|} \sin^2(t)$, $u(0) = u^0 > 0$.

Zeigen Sie, dass die Nichtlinearität f in $C^{0,1}(\Omega \times D, \mathbb{R})$ liegt, wenn man die offenen Intervalle Ω und D geeignet wählt (wie?). Somit ist der lokale Existenz- und Eindeutigkeitssatz anwendbar. Berechnen Sie die Lösungen auf möglichst großen Existenzintervallen (Trennung der Veränderlichen).

(6 Punkte)

Aufgabe 3: [Richtungsfeld]

- a) Skizzieren Sie das Richtungsfeld (mindestens 15 Pfeile) der folgenden Differentialgleichung und markieren Sie die Lösungskurve, die durch den Punkt $t = 1$, $u = 3$ verläuft!
 $u' = (1 - t^2)u$, $t \in [0, 3]$, $u \in [-1, 4]$.
- b) Skizzieren Sie das projizierte Richtungsfeld der folgenden Differentialgleichung und markieren Sie die Bereiche, in denen waagerechte bzw. senkrechte Pfeile vorkommen.
 $u_1' = u_1 u_2$,
 $u_2' = u_2 - u_1$, $u_1, u_2 \in [-1, 1]$.

Für beide Aufgaben können Sie in MATLAB eine geeignete NUMLAB-GUI verwenden.

(6 Punkte)