Aufgaben zur Vorlesung
Numerik II
Wintersemester 2012/13
Übungsblatt 2

W.–J. Beyn
D. Otten

Abgabe: Mittwoch, 24.10.2012, vor Beginn der Übung

Übung: Mi. 12:15–13:45, V5-148

Aufgabe 4: [Erhaltungsgröße]

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} u_1' &= u_2, \\ u_2' &= -\frac{1}{M} F(u_1), \end{aligned}$$

wobei $M > 0$, $F(u) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} V(u)$ und $V(u) = \frac{1}{3}u^3 - u$.

a) Skizzieren Sie (z. B. mit Hilfe einer geeigneten NUMLAB GUI) das Richtungsfeld dieser Differentialgleichung für $M = 1$ und $u_1, u_2 \in [-2, 2]$.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad E(u_1, u_2) = \frac{1}{2} M u_2^2 + V(u_1)$$

eine Erhaltungsgröße für diese Differentialgleichung ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 5: [Stetige Abhängigkeit vom Anfangswert]

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : \mathbb{R} \times D \to \mathbb{R}^n$ stetig. Weiter genüge f einer einseitigen Lipschitz-Bedingung, d. h. es gebe ein $\alpha \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$\langle f(t, v_1) - f(t, v_2), v_1 - v_2 \rangle \leq \alpha \left\| v_1 - v_2 \right\|_2^2$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, $v_1, v_2 \in D$. Dabei bezeichne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das euklidische Skalarprodukt und $\| \cdot \|_2$ die euklidische Norm. Seien $u(t)$ und $v(t)$ Lösungen der Anfangswertprobleme $u'(t) = f(t, u(t))$, $u(t_0) = u^0$ sowie $v'(t) = f(t, v(t))$, $v(t_0) = v^0$ mit demselben Existenzintervall $J = [t_0, t_1)$. Zeigen Sie mit Hilfe des differentiellen Gronwall-Lemmas die Abschätzung

$$\left\| u(t) - v(t) \right\|_2^2 \leq \left\| u^0 - v^0 \right\|_2^2 e^{2\alpha(t - t_0)}$$

für alle $t \in J$.

(6 Punkte)

Aufgabe 6: [Taylormethode]

a) Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^n)$ und $u : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung der Anfangswertaufgabe

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad u(t_0) = u_0,$$

für $t \in [t_0, t_1]$. Zeigen Sie, dass für die Ableitungen der Lösung gilt

$$u^{(k)}(t) = f_k(t, u(t)), \quad k = 0, 1, 2, \dots\ ,$$

wenn die Funktionen f_k geeignet rekursiv definiert werden (wie?).

b) Die Taylormethode besteht darin, den Wert $u(t_0 + h)$, h eine Schrittweite, durch

$$p_m(t_0 + h) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\, u^{(k)}(t_0) h^k = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\, f_k(t_0, u_0) h^k$$

zu approximieren, wobei f_k wie in a) definiert wird.

Führen Sie dies im Fall

$$u' = 1 + tu^2, \quad u(0) = 0$$

mit $m = 5$ explizit durch, um $u(h)$ zu approximieren.

(6 Punkte)