Aufgaben zur Vorlesung
Numerik II
Wintersemester 2012/13
Übungsblatt 3

W.–J. Beyn
D. Otten

Abgabe: Mittwoch, 31.10.2012, vor Beginn der Übung

Übung: Mi. 12:15–13:45, V5-148

Aufgabe 7: [chemische Modellierung und Erhaltungsgrößen]

Stellen Sie für das folgende chemische Reaktionsschema (die inhibierte Michaelis–Menten Reaktion)

$$C + E \overset{k_1}{\to} CE \overset{k_2}{\to} D + E,\; C + CE \underset{k_{-3}}{\overset{k_3}{\rightleftharpoons}} CCE$$

das zugehörige Differentialgleichungssystem für die Konzentrationen $c[C]$, $e[E]$, $\kappa[CE]$, $\sigma[CCe]$ und $d[D]$ auf.
Finden Sie eine Erhaltungsgröße für die Anfangswertaufgabe mit den Anfangswerten c_0, e_0, κ_0, σ_0, d_0 und reduzieren Sie mit ihrer Hilfe auf eine dreidimensionale Anfangswertaufgabe für c, e und κ. Bestimmen Sie die stationären Punkte dieses dreidimensionalen Systems unter der Annahme $e_0 + \kappa_0 + \sigma_0 > 0$.

(6 Punkte)

Aufgabe 8: [Euler-Verfahren und komplexe, lineare AWA]

Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und $\bar{u}(t),\ t \geq 0$ die **komplexwertige** Lösung der Anfangswertaufgabe

$$u' = \lambda u,\ u(0) = u^0 \in \mathbb{C}.$$

a) Zeigen Sie, dass das Euler-Verfahren mit konstanter Schrittweite h für diese Aufgabe auf jedem endlichen Intervall $[0, T]$ konsistent und konvergent von 1. Ordnung ist, d.h.

$$\sup \{|\tau_h(t_j)| : j \in \mathbb{N} \text{ mit } 0 \leq t_j = jh \leq T\} = \mathcal{O}(h)$$
$$\sup \{|\eta_h(t_j)| : j \in \mathbb{N} \text{ mit } 0 \leq t_j = jh \leq T\} = \mathcal{O}(h).$$

(6 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass dies auch auf dem unendlichen Intervall (d.h. Supremum über alle $j \in \mathbb{N}$) richtig ist, sofern Re $\lambda < 0$. Im Fall Re $\lambda > 0$ ist es im allgemeinen falsch (Gegenbeispiel!).

(2 Zusatzpunkte)

Hinweis: Nützliche Restgliedabschätzungen für die komplexe Exponentialreihe findet man in Forster, Analysis 1, § 13. Auch zeige man:

$$|z^j - w^j| \leq j \left[\text{Max}\,(|z|, |w|)\right]^{j-1} |z - w| \quad \forall\, z, w \in \mathbb{C}.$$

Aufgabe 9: [Euler-Verfahren]

Lösen Sie die Verhulst–Gleichung

$$u' = u(1-u),\ t \in [0,10],\ u(0) = u^0$$

numerisch mit dem Euler–Verfahren.
Zu jeweiliger Schrittweite h bezeichne dabei $u_h : \Omega_h \to \mathbb{R}^n$ mit

$$\Omega_h := \{t_j = jh : j = 0, \ldots, 10/h\}$$

die Euler-Näherung sowie $\bar{u} : [0,10] \to \mathbb{R}$ die explizit bekannte Lösung der Verhulst–Gleichung.
Legen Sie für den maximalen Konvergenzfehler

$$\eta_{\max}(h, u^0) = \max\left\{|\bar{u}(t_j) - u_h(t_j)| : t_j \in [0,10]\right\}$$

eine Tabelle an, die sich durch Kombination der Werte $h = 2^{-i}$, $i = 1, \ldots, 6$, und $u^0 = 0.001, 0.1, 0.5, 10$ ergibt. Geben Sie auch die Stelle t_j an, bei der das Maximum angenommen wird, und treffen Sie Vorkehrungen für einen Overflow der Euler–Werte. Interpretieren Sie die Tabelle.

Senden Sie Ihr Programm per Email an dotten@math.uni-bielefeld.de. (6 Punkte)