Aufgaben zur Vorlesung
Numerik II
Wintersemester 2012/13
Übungsblatt 4

W.–J. Beyn
D. Otten

Abgabe: Mittwoch, 07.11.2012, vor Beginn der Übung

Übung: Mi. 12:15–13:45, V5-148

Aufgabe 10: [Landausymbol und experimentelle Konvergenzordnung]

Gegeben sei eine Fehlerfunktion $\varphi \in C([0,\infty),\mathbb{R})$ mit der Eigenschaft

$$\varphi(h) = Ch^p + \mathcal{O}(h^{p+1})$$

für $C \in \mathbb{R}$, $p > 0$ im Grenzwert $h \to 0$. Wie würden Sie die Konstanten C und p schätzen, wenn Ihnen nur zwei Werte $\varphi(h_1)$, $\varphi(h_2)$ für $h_1, h_2 > 0$ bekannt sind?
Bezeichnen $\tilde{C}(h_1,h_2)$, $\tilde{p}(h_1,h_2)$ diese Schätzungen, so zeige man für ein festes Schrittweitenverhältnis $q \in (0,1)$ die Beziehungen

$$\begin{aligned} \tilde{p}(h,qh) &= p + \mathcal{O}(h) \\ \tilde{C}(h,qh) &= C + \mathcal{O}(h|\ln(h)|) \end{aligned}$$

für $h > 0$, $h \to 0$.

(6 Punkte)

Sei nun eine numerisch auswertbare Funktion $y \in C([0,\infty),\mathbb{R})$ gegeben, die

$$y(h) = y_0 + Ch^p + \mathcal{O}(h^{p+1}) \text{ für } h \to 0$$

für gewisse $y_0, C \in \mathbb{R}$ und ein $p > 0$ erfüllt. Wie würden Sie die Konstanten y_0, C und p schätzen, wenn man für festes $q \in (0,1)$ die Werte $y(h)$, $y(qh)$ und $y(q^2h)$ kennt?

(2 Zusatzpunkte)

Aufgabe 11: [explizite Runge-Kutta-Verfahren und lineare AWA]

Gegeben sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ und eine Anfangswertaufgabe mit konstanten Koeffizienten

$$u' = Au \text{ für } t \geq 0,\ u(0) = u^0 \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie, dass jedes explizite Runge-Kutta-Verfahren m-ter Stufe mit der Schrittweite h für dieses System auf eine Rekursion

$$u^{j+1} = A_h u^j,\ j = 0,1,2,\ldots \quad B \in \mathbb{R}^{n,n},$$

führt, wobei $A_h = q(hA)$ und q ein Polynom vom Grad $\leq m$ ist. Geben Sie für das Euler-Verfahren, die Methode von Heun und das klassische Runge-Kutta-Verfahren das jeweilige Polynom q explizit an. Fällt Ihnen etwas auf?

(6 Punkte)

Aufgabe 12: [Euler-Verfahren]

Lösen Sie die Anfangswertprobleme

$$\text{a):}\ \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b):}\ \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -9 & 8 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. analytisch,

2. numerisch durch das explizite Euler–Verfahren und durch die Methode von Heun für die Schrittweiten $h_i = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^i$, $i = 0, \ldots, 5$. Vergleichen Sie jeweils den Konvergenzfehler in der euklidischen Norm an der Stelle $t = 1$

$$\varphi(h_i) = \|u_{h_i}(1) - u(1)\|_2,$$

   wobei u die analytische und u_{h_i} die jeweilige numerische Lösung zur Schrittweite h_i bezeichnet. Zeichnen Sie dazu die Fehler im Bezug zur Schrittweite in ein Diagramm mit logarithmisch skalierten Achsen ein. Was fällt Ihnen auf?

Senden Sie Ihr Programm per Email an dotten@math.uni-bielefeld.de.

(6 Punkte)