Aufgaben zur Vorlesung
Numerik II
Wintersemester 2012/13
Übungsblatt 5

W.–J. Beyn
D. Otten

Abgabe: Mittwoch, 14.11.2012, vor Beginn der Übung

Übung: Mi. 12:15–13:45, V5-148

Aufgabe 13: [Lösbarkeit impliziter Runge-Kutta-Verfahren]

Geben Sie Schrittweiten $h_0 > 0$ an, so dass die in der Vorlesung angegebenen impliziten Runge-Kutta-Verfahren der Stufe $m = 1$ (Ordnung 2) und $m = 2$ (Ordnung 4) für die Anfangswertaufgabe

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(2u_1) - u_2 \\ \cos(2u_2) - u_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \end{pmatrix},$$

für alle $0 < h \leq h_0$ durchführbar, d.h. die impliziten Gleichungen eindeutig auflösbar sind.

(6 Punkte)

Aufgabe 14: [Runge-Kutta-Verfahren]

Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$u' = f(t, u), \quad u(0) = u^0.$$

Schreiben Sie ein Programm, das folgendes leistet:
Nach Eingabe der Raumdimension d, der Schrittweite h, der Stufenzahl $m \in \mathbb{N}$ und eines m-stufigen Runge-Kutta-Tableaus

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \alpha_2 & \beta_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \alpha_m & \beta_{m1} & \cdots & \beta_{m,m-1} & 0 \\ \hline & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{m-1} & \gamma_m \end{array}$$

soll das Programm das zugehörige Runge-Kutta-Verfahren auf $[0, 7]$ durchführen.
Verwenden Sie Ihr Programm zur numerischen Lösung der Beispiele a) und b) mit den angegebenen Runge-Kutta-Verfahren und der Schrittweite $h = 0.1$.
Zeichnen Sie für a) und b) jeweils ein aussagekräftiges Diagramm, das die exakte Lösung und alle numerischen Lösungen enthält!

a) $u' = u - 2\sin t, \quad u(0) = 1,$
Exakte Lösung: $\bar{u}(t) = \cos t + \sin t$

b) $u' = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} u, \quad u(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$
Exakte Lösung: $\bar{u}(t) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -\exp(-t) + 6\exp(-\frac{t}{2}) \\ 2\exp(-t) + 3\exp(-\frac{t}{2}) \end{pmatrix}.$

Runge-Kutta-Tableaus:

- $m = 1$

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

- $m = 2$

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

- $m = 4$

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

(6 Punkte)

Approximieren Sie jeweils numerisch die Konvergenzordnung

(2 Zusatzpunkte)

Aufgabe 15: [Koeffizienten im Runge-Kutta-Tableau]

Geben Sie ein Gleichungssystem für die Koeffizienten $\alpha_1, \alpha_2, \beta_{11}, \beta_{21}, \beta_{22}, \gamma_1, \gamma_2$ an, so dass für das zu dem Tableau

$$\begin{array}{c|cc} \alpha_1 & \beta_{11} & 0 \\ \alpha_2 & \beta_{21} & \beta_{22} \\ \hline & \gamma_1 & \gamma_2 \end{array}$$

gehörende halbimplizite Runge-Kutta-Verfahren Konsistenz der Ordnung 3 vorliegt. Berechnen Sie eine Lösung des Systems mit $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2}$.

Hinweis: Kürzen Sie Argumente wie $(t + \alpha_1 s, v + \beta_{11} s k_1)$, $(t + \alpha_2 s, v + s(\beta_{21} k_1 + \beta_{22} k_2))$ geeignet ab.

(6 Punkte)