

Aufgaben zur Vorlesung
Numerik II
Wintersemester 2012/13
Übungsblatt 6

W.–J. Beyn
D. Otten

Abgabe: Mittwoch, 21.11.2012, vor Beginn der Übung

Übung: Mi. 12:15–13:45, V5-148

Aufgabe 16 [implizite Runge-Kutta-Verfahren und lineare AWA]

Wenden Sie die beiden Gauß-artigen impliziten Runge-Kutta Verfahren ($m = 1, p = 2$, bzw. $m = 2, p = 4$) auf das System mit konstanten Koeffizienten an

$$u' = Au, \quad t \geq 0, \quad u(0) = u^0 \in \mathbb{R}^n, \quad A \in \mathbb{R}^{n,n}.$$

Zeigen Sie, dass die Verfahren die Form

$$u^{j+1} = A_h u^j, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

mit einer Matrix $A_h = r(hA)$ haben. Dabei ist $r(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ eine rationale Funktion und man definiert $r(C) = p(C)(q(C))^{-1}$ für $C \in \mathbb{R}^{n,n}$. Bis zu welcher Ordnung stimmen die Taylorentwicklungen von $r(z)$ und e^z bei $z = 0$ überein?

Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall $n = 1$.

(6 Punkte)

Aufgabe 17: [Lipschitz-Stetigkeit expliziter Runge-Kutta-Verfahren]

Sei $\varphi = \varphi(t, v, h)$ die Verfahrensfunktion eines expliziten Runge-Kutta-Verfahrens zur Bestimmung der numerischen Lösung der Differentialgleichung

$$u' = f(t, u), \quad u(t_0) = u^0,$$

wobei $f : [t_0, t_E] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz beschränkt mit der Konstanten L sei.

Zeigen Sie, dass φ einer Lipschitz-Bedingung im zweiten Argument genügt, dass also ein L_h existiert mit

$$\|\varphi(t, v, h) - \varphi(t, w, h)\| \leq L_h \|v - w\| \quad \forall t \in [t_0, t_E] \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n.$$

Wie verhält sich L_h für $h \rightarrow 0$?

(6 Punkte)

Aufgabe 18: [Implementierung des klassischen Runge-Kutta-Verfahrens]

Lösen Sie die Anfangswertaufgabe zum (modifizierten) Lotka-Volterra-Modell

$$\begin{aligned}x' &= \alpha(1 - y)x - \lambda x^2, \quad x(0) = x_0, \\y' &= (x - 1)y - \mu y^2, \quad y(0) = y_0,\end{aligned}$$

mit konstanter Schrittweite und dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren für $t \in [0, 5]$ und $\alpha = 10$.

- a) Führen Sie jeweils eine Rechnung mit $h = \frac{1}{40}$, $(x_0, y_0) = (3, 1)$ für die Parameterwerte $\lambda = \mu = 0$ und $\lambda = \mu = 1$ durch. Berechnen Sie auch den Wert der Erhaltungsgröße $E(x, y)$ des Lotka-Volterra-Modells an den numerischen Näherungsvektoren. Zeichnen Sie jeweils (t, x) , (t, y) und $(t, E(x, y))$.
- b) Berechnen Sie die experimentelle Konvergenzordnung

$$\text{EOC}(h, qh, q^2h) := \frac{1}{\ln q} \ln \left(\frac{\|u_{qh}(2) - u_{q^2h}(2)\|_2}{\|u_h(2) - u_{qh}(2)\|_2} \right)$$

zur Zeit $t = 2$ für den Anfangswert $(x_0, y_0) = (1, \frac{1}{2})$, die Parameterwerte $\lambda = \mu = 1$ und Schrittweiten $h = q^i h_0$, $i = 0, \dots, 6$, $q = \frac{1}{2}$, $h_0 = \frac{1}{2}$, wobei u_h die numerische Näherungslösung zur Schrittweite h bezeichne. Welche Beobachtungen machen Sie?

Senden Sie Ihr Programm per Email an dotten@math.uni-bielefeld.de.

(6 Punkte)