

Aufgaben zur Vorlesung
Numerik II
Wintersemester 2012/13
Übungsblatt 7

W.–J. Beyn
D. Otten

Abgabe: Mittwoch, 28.11.2012, vor Beginn der Übung

Übung: Mi. 12:15–13:45, V5-148

Aufgabe 19 [Autonomisierung]

Wir betrachten die nicht-autonome Differentialgleichung

$$u' = f(t, u), \quad u(t_0) = u^0. \quad (1)$$

Indem man die Zeit als künstliche Zustandsvariable auffasst, kann das Anfangswertproblem (1) autonomisiert werden, d.h. äquivalent umgeschrieben werden in

$$\begin{pmatrix} u \\ t \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} f(t, u) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u(0) \\ t(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^0 \\ t_0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Zeigen Sie, dass ein explizites Runge-Kutta-Verfahren genau dann invariant unter Autonomisierung ist, wenn für die Koeffizienten gilt

$$\sum_{j=1}^m \gamma_j = 1 \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^m \beta_{ij} = \alpha_i \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

Hinweis: Invariant unter Autonomisierung bedeutet, dass die numerische Lösung für u von (2) mit der von (1) übereinstimmt. Verwenden Sie $s \geq 0$ als unabhängige Variable in (2).

(6 Punkte)

Aufgabe 20: [Stabilität des impliziten Euler-Verfahrens]

Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$u' = f(t, u), \quad t \in J = [t_0, t_E], \quad u(t_0) = u^0 \in \mathbb{R}^n,$$

wobei $f \in C(J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ einer einseitigen Lipschitzbedingung genüge, vergleiche Aufgabe 5, d.h. es gebe ein $\alpha \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$\langle f(t, v) - f(t, w), v - w \rangle \leq \alpha \|v - w\|_2^2 \quad \forall t \in J \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n.$$

Man zeige, dass das implizite Euler-Verfahren

$$\frac{1}{h_j} (u^{j+1} - u^j) = f(t_j, u^{j+1}), \quad j = 0, \dots, M-1, \quad h_{\max} = \max_{j=0, \dots, M-1} h_j$$

unter der Voraussetzung $\alpha h_{\max} \leq q < 1$ stabil ist bezüglich der Norm

$$\|u\|_{2, \infty} = \max_{j=0, \dots, M-1} \|u(t_j)\|_2, \quad u \in (\mathbb{R}^n)^{\Omega_h}.$$

Hinweis: Es darf ohne Beweis angenommen werden, dass das Gleichungssystem

$$v - u = hf(t, v)$$

für alle $u \in \mathbb{R}^n$, $t \in J$ und $h \geq 0$ mit $\alpha h < 1$ genau eine Lösung $v = v(t, u, h)$ besitzt. Weiter orientiere man sich eng am Stabilitätsbeweis der Vorlesung, Satz 2.13, und verwende die einseitige Lipschitzbedingung anstelle der beidseitigen.

(6 Punkte)

Aufgabe 21: [Implizite Runge-Kutta-Verfahren]

Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$u' = f(t, u), \quad u(t_0) = u^0.$$

Schreiben Sie ein Programm, das folgendes leistet:

Nach Eingabe der Anfangsdaten u^0 , der rechten Seite f sowie deren Ableitung Df , des Start- und Endzeitpunktes t_0 und t_E , der Schrittweite h und eines m -stufigen Runge-Kutta-Tableaus

$$\begin{array}{c|ccc} \alpha_1 & \beta_{11} & \cdots & \beta_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_m & \beta_{m1} & \cdots & \beta_{m,m} \\ \hline & \gamma_1 & \cdots & \gamma_m \end{array}$$

soll das Programm das zugehörige (implizite) Runge-Kutta-Verfahren durchführen. Lösen Sie die impliziten Gleichungen im j -ten Schritt mit dem (mehrdimensionalen) Newton-Verfahren. Starten Sie dabei mit $k_i^0 = f(t_j, u^j)$ für $i = 1, \dots, m$ und beenden Sie die Iteration, sobald

$$\max_{i=1, \dots, m} \|k_i^{\nu+1} - k_i^\nu\|_\infty \leq 10^{-7}$$

erfüllt ist. Brechen Sie die Rechnung ab, falls das Newton-Verfahren nicht konvergiert (zu viele Iterationsschritte oder Overflow).

Verwenden Sie Ihr Programm zur numerischen Lösung der aus Aufgabe 14 bekannten Beispiele a) und b) auf dem Intervall $[0, 7]$ mit den angegebenen impliziten Runge-Kutta-Verfahren und der Schrittweite $h = 0.1$. Zeichnen Sie für a) und b) jeweils ein aussagekräftiges Diagramm, das die exakte Lösung und alle numerischen Lösungen enthält!

Runge-Kutta-Tableaus:

- $m = 1$ (mit Konsistenzordnung 2)

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array}$$

- $m = 2$ (mit Konsistenzordnung 4)

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{6}(3 - \sqrt{3}) & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{6}(3 + \sqrt{3}) & \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

(6 Punkte)