Aufgaben zur Vorlesung
Numerik II
Wintersemester 2012/13
Übungsblatt 10

W.–J. Beyn
D. Otten

Abgabe: Montag, 07.01.2013, vor Beginn der Übung (Aufgabe 28–30)
Abgabe: Mittwoch, 09.01.2013, vor Beginn der Übung (Aufgabe 31–32)

Übung: Mo. 16:15–17.45, V5-148 (Sondersitzung: einmalig am 07.01.2013)
Mi. 12:15–13:45, V5-148 (Übung am 19.12.2012 fällt aus)

Aufgabe 28: [Symmetrische Koeffizienten von Mehrschrittverfahren]

Gegeben sei eine Mehrstellenformel

$$\ell(f) = \sum_{\nu=0}^{m} a_\nu f(\nu) - \sum_{\nu=0}^{m} b_\nu f'(\nu), \quad f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

mit

$$\ell(f) = 0 \text{ für alle } f \in \mathcal{P}_p, \quad \sum_{\nu=0}^{m} b_\nu = 1. \tag{1}$$

Die Koeffizienten a_ν, b_ν seien durch (1) eindeutig bestimmt.
Man zeige:

$$a_{m-\nu} = -a_\nu \quad \text{und} \quad b_{m-\nu} = b_\nu \quad \text{für alle} \quad \nu = 0, \ldots, m.$$

Hinweis: Man beachte, dass $p = 2m$ aus der eindeutigen Lösbarkeit von (1) folgt, und man wähle eine geeignete Basis von $\mathcal{P}_p$.

(6 Punkte)

Aufgabe 29: [BDF-Verfahren mit variabler Schrittweite]

Man bestimme die Koeffizienten $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ eines Zweischritt-Verfahrens mit nichtäquidistanten Knoten $t_j < t_{j+1} < t_{j+2}$,

$$\alpha_0 u^j + \alpha_1 u^{j+1} + \alpha_2 u^{j+2} = f(t_{j+2}, u^{j+2}), \quad j = 0, 1, 2, \ldots,$$

so dass die Konsistenzordnung $\mathcal{O}(h_{\max}^2)$ vorliegt, wobei $h_{\max} = \max_{j=0,\ldots,M-1} h_j$ und $h_j = t_{j+1} - t_j$.
Unter welcher Bedingung an h_j, h_{j+1} erfüllt das charakteristische Polynom $q(z) = \sum_{\nu=0}^{2} \alpha_\nu z^\nu$ die Wurzelbedingung?
Hinweis: Zur Konstruktion der Formel und zum Nachweis der Konsistenzordnung kann Numerik I, §5.4 verwendet werden.

(6 Punkte)

Aufgabe 30: [Lineare Differenzengleichungen]

Geben Sie für die folgenden Differenzengleichungen jeweils die allgemeine Lösung der homogenen Aufgabe und die spezielle Lösung zu den vorgegebenen Anfangswerten an.

(a) $v_{j+2} = v_{j+1} + v_j, \quad j = 0, 1, 2 \ldots$

Anfangswerte: $v_0 = 0,\ v_1 = 1$ (Fibonacci–Folge)

(b) Verfahren der rückwärtigen Differenzen (BDF) der Ordnung 2 bzw. 3 für die Aufgabe $u' = 0,\ u(0) = 1$

Anfangswerte: $v_0 = 1,\ v_1 = 1 + h^2$ bzw. $v_0 = 1,\ v_1 = 1,\ v_2 = 1 + h^3$

(6 Punkte)

Aufgabe 31: [Adams–Bashforth–Programmierung]

Das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -9 & 8 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

soll numerisch mit dem m–Schritt–Adams–Bashforth–Verfahren für $m \in \{1, \ldots, 12\}$ auf $[0, 1]$ realisiert werden.
Berechnen Sie dafür zunächst für jedes m die Koeffizienten $a_{m-1}, a_m, b_0, \ldots, b_{m-1}$, indem Sie das entsprechende lineare Gleichungssystem (vgl. Skript, Satz 3.1) aufstellen und numerisch lösen.
Verwenden Sie für alle Verfahren die Schrittweiten $h_i = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^i$, $i = 0, \ldots, 5$. Als Startwerte nehmen Sie die Werte der aus Aufgabe 12 a) bekannten exakten Lösung $\bar{u}(t) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 + 2t \\ 5 + t \end{pmatrix} e^{-\frac{t}{2}}$ an den Stellen $t_j = h_i j$, $j = 0, \ldots, m - 1$.
Zeichnen Sie den Fehler der numerischen Lösung u_h zur exakten Lösung $\bar{u}$ an den Stellen t_j in ein aussagekräftiges logarithmisches Diagramm ein und bestimmen Sie die experimentelle Konvergenzordnung zur Zeit $t = 1$ (vgl. Aufgabe 10)

$$EOC(h_i, h_{i+1}) := \frac{\ln\left(\frac{\varphi(h_i)}{\varphi(h_{i+1})}\right)}{\ln\left(\frac{h_i}{h_{i+1}}\right)}, \quad i = 0, \ldots, 4, \quad \varphi(h) = \|u_h(1) - \bar{u}(1)\|_2 .$$

Senden Sie Ihr Programm per Email an dotten@math.uni-bielefeld.de.

(6 Punkte)

Aufgabe 32: [Randwertaufgaben in der chemischen Modellierung]

Stellen Sie für die inhibierte Michaelis–Menten–Reaktion (vgl. Aufgabe 7)

$$C + E \stackrel{k_1}{\to} CE \stackrel{k_2}{\to} D + E, \quad C + CE \underset{k_{-3}}{\overset{k_3}{\rightleftarrows}} CCE$$

eine Anfangsrandwertaufgabe auf, in der Dirichletsche Randbedingungen für alle Substrate und Diffusion nur für C und D angenommen werden. Leiten Sie für den stationären Zustand $c(x),\ 0 \leq x \leq L$, des Substrats C eine Randwertaufgabe der Form

$$c'' = S_0(x) \cdot g(c),\ 0 \leq x \leq L, \quad c(0) = c_0,\ c(L) = c_L$$

her, wobei $S_0(x)$ die Summe der Anfangskonzentrationen von E, CE und CCE ist.
Skizzieren Sie die Funktion $g(c)$ (Kurvendiskussion) und diskutieren Sie ihr Verhalten beim Übergang $k_3 \to 0$.

(6 Punkte)