Aufgaben zur Vorlesung
Numerik II
Wintersemester 2012/13
Übungsblatt 11

W.–J. Beyn
D. Otten

Abgabe: Mittwoch, 16.01.2013, vor Beginn der Übung

Übung: Mi. 12:15–13:45, V5-148

Aufgabe 33: [Schießmethode]

Überlegen Sie sich eine Schießmethode für die allgemeine skalare Sturmsche Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} u''(x) &= f(x,u(x)), \quad a \le x \le b, \\ \alpha_a u(a) - \beta_a u'(a) &= \gamma_a, \\ \alpha_b u(b) + \beta_b u'(b) &= \gamma_b, \end{aligned}$$

wobei $\alpha_a^2 + \beta_a^2 > 0$ und $\alpha_b^2 + \beta_b^2 > 0$ vorausgesetzt ist. Führen Sie nur einen reellen Parameter s ein und stellen Sie eine nichtlineare Gleichung $g(s) = 0$ auf, deren Lösung äquivalent zur Lösung der Randwertaufgabe ist. Geben Sie an, welche Anfangswertaufgabe man lösen muss, um die Ableitung $g'(s)$ zu erhalten.

(6 Punkte)

Aufgabe 34: [Fredholmsche Alternative]

Man beweise für die lineare Randwertaufgabe 2. Ordnung

$$\begin{aligned} Lu &:= u'' + pu' + qu = r, \ \text{ in } [a,b] \text{ mit } p,q,r \in C([a,b],\mathbb{R}) \\ Ru &:= \begin{pmatrix} \alpha_a u(a) + \beta_a u'(a) \\ \alpha_b u(b) + \beta_b u'(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_a \\ \gamma_b \end{pmatrix} = \gamma \end{aligned}$$

unter Verwendung der Fredholmschen Alternative für lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung (vgl. Skript, Satz 4.1), dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Die homogene Aufgabe $Lu = 0$, $Ru = 0$ besitzt nur die triviale Lösung.

(ii) Die Matrix

$$\begin{pmatrix} \alpha_a & \beta_a \\ \alpha_b y_1(b) + \beta_b y_1'(b) & \alpha_b y_2(b) + \beta_b y_2'(b) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$$

ist invertierbar.
Dabei bezeichnen y_1, y_2 Lösungen des homogenen Gleichung $Ly = 0$ zu den Anfangswerten $y_1(a) = 1$, $y_1'(a) = 0$, bzw. $y_2(a) = 0$, $y_2'(a) = 1$.

(iii) Für jedes $r \in C([a,b],\mathbb{R})$ und jedes $\gamma \in \mathbb{R}^2$ besitzt die inhomogene Randwertaufgabe $Lu = r$, $Ru = \gamma$ genau eine Lösung $u \in C^2([a,b],\mathbb{R})$.

(6 Punkte)

Zusatz: Untersuchen Sie die Lösbarkeit der Randwertaufgaben

a) $u'' - u' - 2u = 0$, $u(0) + u'(0) = 1$, $u(1) = 0$,

b) $u'' + u = 0$, $u(0) = \gamma_a$, $u(\pi) = \gamma_b$. (4 Zusatzpunkte)

Aufgabe 35: [Implementierung eines Schießverfahrens]

Lösen Sie die skalare Randwertaufgabe

$$u'' = \frac{3}{2}u^2, \quad x \in \ [0,1], \quad u(0) = 4,\ u(1) = 1$$

numerisch mit dem einfachen Schießverfahren:
Bezeichnet $u(x,s)$ die Lösung der Differentialgleichung zu den Anfangswerten

$$u(0) = 4,\ u'(0) = s,$$

so löse man die Gleichung

$$g(s) = u(1,s) - 1 = 0$$

mit Hilfe der Regula falsi (Skript Kapitel 4, §1.1) zu geeigneten Startwerten. Brechen Sie die Iteration ab, wenn $|g(s)| \leqslant tol$ erfüllt ist und berechnen Sie $u(1,s)$ mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren zur Schrittweite h für das entsprechende System 1. Ordnung ($h = \frac{1}{400}$, $tol = 10^{-12}$).
Plotten Sie beide Lösungskurven in dasselbe Diagramm!

Senden Sie Ihr Programm per Email an dotten@math.uni-bielefeld.de.

(6 Punkte)