

Aufgaben zur Vorlesung
Numerik II
Wintersemester 2012/13
Übungsblatt 12

W.–J. Beyn
D. Otten

Abgabe: Mittwoch, 23.01.2013, vor Beginn der Übung

Übung: Mi. 12:15–13:45, V5-148

Aufgabe 36: [Transformation auf Systeme 1. Ordnung]

Transformieren Sie ein System von Randwertaufgaben 2. Ordnung

$$u''(x) = f(x, u(x), u'(x)), \quad x \in [a, b], \quad u(x) \in \mathbb{R}^n, \quad f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

mit

- a) Dirichlet-Randbedingungen: $u(a) = \gamma_a, u(b) = \gamma_b,$
- b) Neumann-Randbedingungen: $u'(a) = u'(b) = 0,$
- c) periodischen Randbedingungen: $u(a) = u(b), u'(a) = u'(b)$

in ein $2n$ -dimensionales System 1. Ordnung der Gestalt

$$v'(x) = g(x, v(x)), \quad x \in [a, b], \\ R_a v(a) + R_b v(b) = \Gamma.$$

Geben Sie jeweils g, R_a, R_b und Γ an.

(6 Punkte)

Aufgabe 37: [Reguläre Lösung]

Die Lösung $\bar{u} \in C^2([a, b], \mathbb{R})$ einer Randwertaufgabe 2. Ordnung

$$-u''(x) = f(x, u(x)), \quad x \in [a, b], \\ \alpha_a u(a) - \beta_a u'(a) = \gamma_a, \\ \alpha_b u(b) - \beta_b u'(b) = \gamma_b$$

heißt **regulär**, wenn (\bar{u}, \bar{u}') eine reguläre Lösung des entsprechenden 2-dimensionalen Randwertproblems 1. Ordnung ist (vgl. Definition 4.4).

Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist die Nulllösung der Randwertaufgabe

$$-u''(x) = \lambda \sin(u(x)), \quad x \in [0, 1], \quad u'(0) = 0, \quad u(1) = 0$$

regulär?

(6 Punkte)

Aufgabe 38: [Klassisches Differenzenverfahren]

Berechnen Sie die beiden Lösungen des Randwertproblems aus Aufgabe 35

$$u'' = \frac{3}{2}u^2, \quad x \in [0, 1], \quad u(0) = 4, \quad u(1) = 1$$

numerisch mit dem klassischen Differenzenverfahren zu den Schrittweiten $h_i = \frac{1}{10} \left(\frac{1}{2}\right)^i$, $i = 0, \dots, 6$.

Verwenden Sie zur Lösung der nichtlinearen Gleichungssysteme das Newton-Verfahren. Wählen Sie dabei als Abbruchkriterium

$$\|u^{(k+1)} - u^{(k)}\| \leq \text{tol} = 10^{-12}$$

und als Startvektor die Gitterfunktion zu

$$\bar{u}^{(1)}(x) = \frac{4}{(1+x)^2} \quad (\text{exakte Lösung})$$

bzw. zu der Parabel mit den Daten

$$u(0) = 4, \quad u\left(\frac{1}{2}\right) = -11, \quad u(1) = 1.$$

a) Berechnen Sie für die erste Lösung die Konvergenzfehler

$$\varphi(h_i) = \left\| \bar{u}^{(1)}|_{\Omega_{h_i}} - u_{h_i} \right\|_{\infty}, \quad i = 0, \dots, 6$$

und schätzen Sie die Konvergenzordnung nach Aufgabe 31.

b) Bestimmen Sie für den Funktionswert $u_h\left(\frac{1}{2}\right)$ der zweiten Lösung die experimentelle Konvergenzordnung EOC $(h, \frac{1}{2}h, \frac{1}{4}h)$ wie in Aufgabe 18.

Senden Sie Ihr Programm per Email an dotten@math.uni-bielefeld.de.

(6 Punkte)