

# Übungen zur Vorlesung

## Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen

### Wintersemester 2013/2014

Prof. Dr. L'ubomír Bañas  
Dipl.-Math. Denny Otten

Übungsblatt 5  
13.11.2013

**Abgabe: Mittwoch, 20.11.2013, 12:00 Uhr** in das Postfach des Tutors.

Di. 12-14 Uhr: Denny Otten, dotten@math.uni-bielefeld.de, Postfach 44 in V3-128 (Übung, V5-148)

#### Aufgabe 13: [Lösbarkeit impliziter Runge-Kutta-Verfahren]

Geben Sie Schrittweiten  $h_0 > 0$  an, so dass die in der Vorlesung angegebenen impliziten Runge-Kutta-Verfahren der Stufe  $m = 1$  (Ordnung 2) und  $m = 2$  (Ordnung 4) für die Anfangswertaufgabe

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(2u_1) - u_2 \\ \cos(2u_2) - u_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \end{pmatrix},$$

für alle  $0 < h \leq h_0$  durchführbar, d.h. die impliziten Gleichungen eindeutig auflösbar sind.

(6 Punkte)

#### Aufgabe 14: [Runge-Kutta-Verfahren]

Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$u' = f(t, u), \quad u(0) = u^0.$$

Schreiben Sie ein Programm, das folgendes leistet:

Nach Eingabe der Raumdimension  $d$ , der Schrittweite  $h$ , der Stufenzahl  $m \in \mathbb{N}$  und eines  $m$ -stufigen Runge-Kutta-Tableaus

0	0	...	...	0
$\alpha_2$	$\beta_{21}$	$\ddots$	$\ddots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\ddots$	$\vdots$
$\alpha_m$	$\beta_{m1}$	...	$\beta_{m,m-1}$	0
	$\gamma_1$	...	$\gamma_{m-1}$	$\gamma_m$

soll das Programm das zugehörige Runge-Kutta-Verfahren auf  $[0, 7]$  durchführen.

Verwenden Sie Ihr Programm zur numerischen Lösung der Beispiele a) und b) mit den angegebenen Runge-Kutta-Verfahren und der Schrittweite  $h = 0.1$ .

Zeichnen Sie für a) und b) jeweils ein aussagekräftiges Diagramm, das die exakte Lösung und alle numerischen Lösungen enthält!

a)  $u' = u - 2 \sin t, \quad u(0) = 1,$

Exakte Lösung:  $\bar{u}(t) = \cos t + \sin t$

b)  $u' = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} u, \quad u(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$

Exakte Lösung:  $\bar{u}(t) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -\exp(-t) + 6 \exp(-\frac{t}{2}) \\ 2 \exp(-t) + 3 \exp(-\frac{t}{2}) \end{pmatrix}.$

Runge-Kutta-Tableaus:

- $m = 1$

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

- $m = 2$

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

- $m = 4$

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

(6 Punkte)

Approximieren Sie jeweils numerisch die Konvergenzordnung. Hinweis: Verwenden Sie die Resultate aus Aufgabe 10.

(2 Zusatzpunkte)

**Aufgabe 15:** [Koeffizienten im Runge-Kutta-Tableau]

Geben Sie ein Gleichungssystem für die Koeffizienten  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_{11}, \beta_{21}, \beta_{22}, \gamma_1, \gamma_2$  an, so dass für das zu dem Tableau

$$\begin{array}{c|cc} \alpha_1 & \beta_{11} & 0 \\ \alpha_2 & \beta_{21} & \beta_{22} \\ \hline & \gamma_1 & \gamma_2 \end{array}$$

gehörende halbimplizite Runge-Kutta-Verfahren Konsistenz der Ordnung 3 vorliegt. Berechnen Sie eine Lösung des Systems mit  $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2}$ .

**Hinweis:** Kürzen Sie Argumente wie  $(t + \alpha_1 s, v + \beta_{11} s k_1), (t + \alpha_2 s, v + s(\beta_{21} k_1 + \beta_{22} k_2))$  geeignet ab.

(6 Punkte)