

Numerik von Evolutionsgleichungen Sommersemester 2014

Übungsblatt 5

Prof. Dr. Wolf-Jürgen Beyn
Dr. Denny Otten



Abgabe: Dienstag, 20.05.2014, bis 12:00 Uhr in das Postfach des Tutors.

Tutorium: Do. 12-14 Uhr, V5-148, Denny Otten, dotten@math.uni-bielefeld.de, Postfach 44 in V3-128.

Aufgabe 7 (Skalierung der inkompressiblen Navier-Stokes Gleichung und Reynolds-Zahl).

Gegeben sei eine hinreichend glatte Lösung

$$(u, p) : (0, L)^3 \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$$

der inkompressiblen Navier-Stokes Gleichung (mit der konstanten Dichte $\rho > 0$)

$$u_t + (u^\top \nabla)u + \frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{\mu}{\rho} \Delta u, \quad \operatorname{div}(u) = 0, \quad \text{in } (0, L)^3 \times (0, T).$$

Man bestimme Konstanten $U_0, P_0 > 0$, so dass die skalierten Funktionen $(v, q) : (0, 1)^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, gegeben durch

$$u(x, t) = U_0 v\left(\frac{x}{L}, \frac{t}{T}\right), \quad p(x, t) = P_0 q\left(\frac{x}{L}, \frac{t}{T}\right), \quad x \in (0, L)^3, t \in (0, T),$$

der Gleichung

$$v_t + (v^\top \nabla)v + \nabla q = \frac{1}{R} \Delta v, \quad \operatorname{div}(v) = 0 \quad \text{in } (0, 1)^4$$

genügen. Man drücke die Konstante R (Reynolds-Zahl) durch die Konstanten L, U_0, ρ, μ aus.

(6 Punkte)

Aufgabe 8 (Numerische Lösung einer linearen Reaktions-Diffusions-Gleichung).

Lösen Sie die Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} - 10u & , \quad x \in [0, 1], t \in [0, 1], \\ u(x, 0) &= u_0(x) & , \quad x \in [0, 1], \\ u(0, t) &= u_0(0), \quad u(1, t) = u_0(1) & , \quad t \in [0, 1], \end{aligned}$$

numerisch mit dem ϑ -Verfahren für $\vartheta = 0, \frac{1}{2}, 1$ und die Schrittweitenkombinationen

$$(\Delta x, \Delta t) = (0.2, 0.05), (0.2, 0.02), (0.1, 0.01), (0.1, 0.005).$$

Verwenden Sie die beiden Anfangsfunktionen

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 1, \quad x \in [0, 1], \\ u_0(x) &= \begin{cases} 0 & |x - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{4}, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Zeichnen Sie die Näherungslösungen als Funktionen über einem (x, t) -Gitter und treffen Sie Vorkehrungen für den Fall, dass die Werte explodieren (!).

(6 Punkte)