

# Numerik von Evolutionsgleichungen

## Sommersemester 2014

### Übungsblatt 6

Prof. Dr. Wolf-Jürgen Beyn

Dr. Denny Otten



**Abgabe: Dienstag, 27.05.2014, bis 12:00 Uhr** in das Postfach des Tutors.

Tutorium: Do. 12-14 Uhr, V5-148, Denny Otten, dotten@math.uni-bielefeld.de, Postfach 44 in V3-128.

#### Aufgabe 9 (Konsistenzordnung der impliziten Mittelpunktsregel).

Sei wie in der Vorlesung

$$v' = F_{\Delta x}(v, t), \quad t \in [0, T], \quad v(0) = v^0 \quad (1)$$

das Liniensystem zum klassischen Differenzenverfahren mit der Schrittweite  $\Delta x$  für die Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + f(u, x, t) & , \quad x \in (a, b), t \in (0, T), \\ u(x, 0) &= u_0(x) & , \quad x \in (a, b), \\ u(a, t) &= \gamma_a, \quad u(b, t) = \gamma_b & , \quad t \in (0, T). \end{aligned} \quad (2)$$

Verwenden Sie anstelle der Trapezmethode (Crank-Nicholson Verfahren) die implizite Mittelpunktsregel zur Diskretisierung von (1) auf dem Gitter  $\{t_j = j\Delta t : j = 0, \dots, N\}$ ,  $\Delta t = \frac{T}{N}$ ,

$$\frac{1}{\Delta t}(v^j - v^{j-1}) = F_{\Delta x}\left(\frac{1}{2}(v^j + v^{j-1}), \frac{1}{2}(t_j + t_{j-1})\right), \quad j = 1, \dots, N. \quad (3)$$

Zeigen Sie, dass die so entstehende vollständige Diskretisierung einen Konsistenzfehler der Form  $\mathcal{O}((\Delta x)^2 + (\Delta t)^2)$  bzgl. der Maximumnorm hat, falls die Lösung von (2) und die Nichtlinearität  $f$  hinreichend glatt sind.

**Hinweis:** Es ist hilfreich, zunächst den linearen Fall mit  $f(x, t)$  statt  $f(u, x, t)$  zu betrachten. (6 Punkte)

#### Aufgabe 10 (Numerische Lösung einer linearen Reaktions-Diffusions-Gleichung).

Wiederholen Sie die Rechnung von Aufgabe 8, wobei Sie die Dirichlet Bedingung  $u(1, t) = u_0(1)$  durch die Neumann Bedingung  $u_x(1, t) = 0$  ersetzen und am rechten Rand wie in der Vorlesung diskretisieren.

(6 Punkte)