

Numerik von Evolutionsgleichungen Sommersemester 2014

Übungsblatt 8

Prof. Dr. Wolf-Jürgen Beyn
Dr. Denny Otten



Abgabe: Dienstag, 10.06.2014, bis 12:00 Uhr in das Postfach des Tutors.

Tutorium: Do. 12-14 Uhr, V5-148, Denny Otten, dotten@math.uni-bielefeld.de, Postfach 44 in V3-128.

Aufgabe 13 (Stabilität des 'upwind' Verfahrens bei großer Konvektion).

Gegeben sei eine lineare Anfangsrandwertaufgabe mit Konvektionsterm

$$\begin{aligned}u_t &= u_{xx} - \nu u_x - \lambda u, & x \in [0, 1], t \in [0, 1], \\u(x, 0) &= u_0(x), & x \in [0, 1], \\u(0, t) &= u_0(0), \quad u(1, t) = u_0(1), & t \in [0, 1]\end{aligned}$$

und Parametern $\lambda, \nu \geq 0$. Das sogenannte 'upwind' Verfahren ersetzt den Konvektionsterm νu_x je nach Vorzeichen von ν durch einen einseitigen Differenzenquotienten, und zwar im Fall $\nu \geq 0$ wie folgt:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta t}(u_i^j - u_i^{j-1}) &= \vartheta U_i^j + (1 - \vartheta)U_i^{j-1} & j = 1, \dots, N, i = 1, \dots, M - 1, \\ \text{wobei } U_i^j &:= \frac{1}{\Delta x^2}(u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j) - \frac{\nu}{\Delta x}(u_i^j - u_{i-1}^j) - \lambda u_i^j.\end{aligned}$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Stabilitätslemmas, dass dieses Verfahren unter der Schrittweitenbedingung

$$\Delta t \left(\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{\nu}{\Delta x} + \lambda \right) \leq \frac{1}{1-\vartheta}$$

bzgl. der Maximumnorm stabil ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 14 (Numerische Lösung einer Reaktions-Diffusions-Gleichung mit Konvektion).

Setzen Sie Aufgabe 8 bzw. 12 fort durch Lösung der linearen Anfangsrandwertaufgabe mit Konvektion

$$\begin{aligned}u_t &= u_{xx} - \nu u_x - 10u, & x \in [0, 1], t \in [0, 1], \\u(x, 0) &= u_0(x), & x \in [0, 1], \\u(0, t) &= u_0(0), \quad u(1, t) = u_0(1), & t \in [0, 1].\end{aligned}$$

Verwenden Sie das ϑ -Verfahren für $\vartheta = 0, \frac{1}{2}, 1$ mit den Schrittweitenkombinationen

$$(\Delta x, \Delta t) = (0.2, 0.02), (0.2, 0.01), (0.1, 0.005), (0.1, 0.0025).$$

der konstanten Anfangsfunktion $u_0(x) = 1, x \in [0, 1]$ und den Werten

$$\nu = 1, 20.$$

Kommentieren Sie Ihr Ergebnis im Hinblick auf den nichtlinearen Stabilitätssatz der Vorlesung.
(6 Punkte)