Aufgaben zu
Gewöhnliche Differentialgleichungen
Sommersemester 2014

W.–J. Beyn
A. Girod

Abgabe: Mittwoch, 30.04.2014, 8:30 Uhr

Übungsgruppen: Do. 14–16, V5–148, Postfach: V3–128 (36) (Nils Strunk)
Do. 18–20, V5–148, Postfach: V3–128 (215) (Jochen Röndigs)
Di. 12–14, V5–148, Postfach: V3–128 (44) (Denny Otten)
Di. 16–18, V4–119, Postfach: V3–128 (114) (Alina Girod)

Aufgabe 6:

Gegeben sei die Bernoullische Differentialgleichung

$$u' + \frac{1}{3}u + \frac{t}{3}u^4 = 0, \quad u(0) = 2.$$

- Führen Sie die Bernoullische Differentialgleichung durch die Substitution $v := u^{-3}$ auf eine lineare Differentialgleichung zurück.
- Bestimmen Sie auf diese Weise die Lösung der obigen Anfangswertaufgabe.

(6 Punkte)

Aufgabe 7:

Gegeben ist die folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$u'' = u^2 - 4. \tag{1}$$

Transformieren Sie (1) auf ein System erster Ordnung.
Zeigen Sie, dass

$$\begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \dfrac{6}{\cosh^2(t)} \\ 12\dfrac{\sinh(t)}{\cosh^3(t)} \end{pmatrix} \tag{2}$$

eine spezielle Lösung dieses Systems ist. Diskutieren Sie, zu welchem Fall im Satz 4.3 der Vorlesung die Lösung gehört.
Skizzieren Sie das Phasenbild, wobei insbesondere die Lösung (2) eingezeichnet werden soll.

(6 Punkte)

– Bitte wenden –

Aufgabe 8:

Gegeben sei die skalare Anfangswertaufgabe

$$u'(t) = u(t)[b(t) - c(t)u(t)], \quad u(t_0) = u_0 > 0, \tag{3}$$

wobei $b, c \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ stetige, positive Funktionen sind. Im Folgenden werden nur positive Lösungen von (3) betrachtet.

- Geben Sie die Anfangswertaufgabe an, die sich mit der Transformation

  $$y = \frac{1}{u}$$

  ergibt.

- Lösen Sie die transformierte Anfangswertaufgabe, zeigen Sie $y(t) > 0$ für $t > t_0$ und geben Sie mit ihrer Hilfe die Lösung von (3) an.

- Zeigen sie, dass diese Lösung auch für $t < t_0$ positiv bleibt, wobei sie

  - entweder für alle $t < t_0$ existiert
  - oder es ein $t_1 < t_0$ gibt mit $\lim\limits_{t \searrow t_1} u(t) = \infty$.

- Sind u und v zwei Lösungen mit $u(t_0) < v(t_0)$, so gilt $u(t) < v(t)$ für alle t im gemeinsamen Existenzintervall.

(6 Punkte)