Aufgaben zu
Gewöhnliche Differentialgleichungen
Sommersemester 2014

W.–J. Beyn
A. Girod

Abgabe: Mittwoch, 07.05.2014, 8:30 Uhr

Übungsgruppen: Do. 14–16, V5–148, Postfach: V3–128 (36) (Nils Strunk)
Do. 18–20, V5–148, Postfach: V3–128 (215) (Jochen Röndigs)
Di. 12–14, V5–148, Postfach: V3–128 (44) (Denny Otten)
Di. 16–18, V4–119, Postfach: V3–128 (114) (Alina Girod)

Aufgabe 9:

Transformieren Sie die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$u'' = e^u u' + u$$

auf ein System erster Ordnung.
Zeichnen Sie für dieses System das zugehörige Richtungsfeld (mind. 10 Pfeile) im Bereich $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Kennzeichnen Sie die Isoklinen (das sind die Kurven, auf denen im Richtungsfeld senkrechte bzw. waagerechte Pfeile auftreten). (6 Punkte)

Aufgabe 10:

Das Räuber–Beute Modell nach Lotka–Volterra wird durch das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} u_1' &= (\alpha - \beta u_2) u_1 \\ u_2' &= (-\gamma + \delta u_1) u_2 \end{aligned}$$

mit positiven Konstanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ gegeben. Hierbei beschreibt $u_1 > 0$ die Anzahl der Beutetiere und $u_2 > 0$ die Anzahl der Räuber.
Zeigen Sie, dass $E(u_1, u_2) = E_1(u_1) E_2(u_2)$ mit

$$\begin{aligned} E_1(u_1) &= u_1^\gamma e^{-\delta u_1}, \\ E_2(u_2) &= u_2^\alpha e^{-\beta u_2} \end{aligned}$$

eine Erhaltungsgröße des obigen Differentialgleichungssystems im positiven Quadranten ist.
(6 Punkte)

– Bitte wenden –

Aufgabe 11:

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge, $p \in C(M, \mathbb{R})$ eine positive Funktion, d. h. $p(x) > 0$ für alle $x \in M$.
Sei $|\cdot|$ eine Norm im $\mathbb{K}^m$ mit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.
Zeigen Sie, dass mit dieser stetigen Funktion p

$$C(M, \mathbb{K}^m; p) := \{f \in C(M, \mathbb{K}^m) : \exists\, \alpha \geq 0 \text{ mit } |f(x)| \leq \alpha\, p(x)\, \forall\, x \in M\}$$

ein $\mathbb{K}$–Vektorraum ist und ein Banachraum bezüglich

$$\|f\| := \sup_{x \in M} \frac{|f(x)|}{p(x)}.$$

(6 Punkte)