Aufgaben zu
Gewöhnliche Differentialgleichungen
Sommersemester 2014

W.–J. Beyn
A. Girod

Abgabe: Mittwoch, 14.05.2014, 8:30 Uhr

Übungsgruppen: Do. 14–16, V5–148, Postfach: V3–128 (36) (Nils Strunk)
Do. 18–20, V5–148, Postfach: V3–128 (215) (Jochen Röndigs)
Di. 12–14, V5–148, Postfach: V3–128 (44) (Denny Otten)
Di. 16–18, V4–119, Postfach: V3–128 (114) (Alina Girod)

Aufgabe 12:

Gegeben sei die skalare Anfangswertaufgabe 3. Ordnung

$$u''' = t^2 u, \quad u(0) = u'(0) = u''(0) = 0. \tag{1}$$

Transformieren Sie (1) auf eine äquivalente Anfangswertaufgabe 1. Ordnung im $\mathbb{R}^3$ von der Form

$$v' = A(t)v, \quad v(0) = v_0 \in \mathbb{R}^3.$$

Berechnen Sie für die äquivalente Integralgleichung die ersten beiden Picard–Iterierten

$$w^1 = Tw^0, \quad w^2 = Tw^1 \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$$

mit der Startfunktion $w^0(t) = (1,1,1)^T,\ t \in \mathbb{R}$.

(6 Punkte)

Aufgabe 13:

Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$u' = f(t,u), \quad t \in J, \quad u(t_0) = u_0 \quad (t_0 \in J, u_0 \in \mathbb{R}^n). \tag{2}$$

Hierbei bezeichnet J ein kompaktes Intervall. Zusätzlich sei die Funktion $f \in C(J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ bezüglich der zweiten Variablen Lipschitz–beschränkt (mit der Lipschitz-Konstanten L).
Zeigen Sie, dass die Picard–Iterierten der zu (2) äquivalenten Integralgleichung

$$v_{k+1} = T(v_k), \quad k = 0, 1, \ldots, \text{ zum Startwert } v_0 \in C(J, \mathbb{R}^n)$$

die Abschätzung

$$|v_{k+1}(t) - v_k(t)| \leq C\, \frac{L^k |t - t_0|^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N},\ t \in J \tag{3}$$

mit einer nur von v_0 und u_0 abhängigen Konstanten C erfüllen.

Hinweis: Die Konstante C erhält man durch Abschätzen von $|v_1(t) - v_0(t)|$.

(6 Punkte)

— Bitte wenden —

Aufgabe 14:

Beweisen Sie ohne Verwendung des Kontraktionssatzes:

- Die in Aufgabe 13 definierte Folge v_k ist eine Cauchy-Folge bezüglich $\|\cdot\|_\infty$.

  Hinweis: Zum Beweis wird nur die Behauptung von Aufgabe 13 benötigt, aber nicht ihr Beweis.

- Die Folge v_k konvergiert gleichmäßig gegen die Lösung der Anfangswertaufgabe (2).

(6 Punkte)