Aufgaben zu
Gewöhnliche Differentialgleichungen
Sommersemester 2014

W.–J. Beyn
A. Girod

Abgabe: Mittwoch, 28.05.2014, 8:30 Uhr

Übungsgruppen: Do. 14–16, V5–148, Postfach: V3–128 (36) (Nils Strunk)
Do. 18–20, V5–148, Postfach: V3–128 (215) (Jochen Röndigs)
Di. 12–14, V5–148, Postfach: V3–128 (44) (Denny Otten)
Di. 16–18, V4–119, Postfach: V3–128 (114) (Alina Girod)

Aufgabe 18:

Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$u' = f(t,u), \quad u(t_0) = u_0 \tag{1}$$

wobei $f \in C(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^n)$ sei und ein $L \geq 0$ existiere mit

$$|f(t,u) - f(t,v)| \leq L|u-v| \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}, u, v \in \mathbb{R}^n.$$

Beweisen Sie, dass (1) genau eine Lösung $\bar{u} \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ auf ganz $\mathbb{R}$ besitzt.

(6 Punkte)

Aufgabe 19:

Zeigen Sie, dass die Anfangswertaufgaben

(a) $u'' = -\sin u - cu', \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = v_0$ (gedämpftes Pendel)

(b) $u' = u\ \sin(u^2) + e^{-t^2}, \quad u(0) = u_0,$

für jede Wahl von u_0, v_0, $c \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ besitzen.

(6 Punkte)

Aufgabe 20:

Übertragen Sie das Gronwall-Lemma auf linksseitige Intervalle $J = (t_1, t_0]$.
Welche Abschätzung folgt im Intervall J für $\varphi \in C(J, \mathbb{R})$ aus der Integralungleichung

$$\varphi(t) \leq \alpha + \int_t^{t_0} \beta(s)\varphi(s)ds, \quad t \in J\ ?$$

Hierbei seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta \in C(J, \mathbb{R})$ mit $\beta \geq 0$ in J gegeben.

(6 Punkte)