Aufgaben zu
Gewöhnliche Differentialgleichungen
Sommersemester 2014

W.–J. Beyn
A. Girod

Abgabe: Mittwoch, 04.06.2014, 8:30 Uhr

Übungsgruppen: Do. 14–16, V5–148, Postfach: V3–128 (36) (Nils Strunk)
Do. 18–20, V5–148, Postfach: V3–128 (215) (Jochen Röndigs)
Di. 12–14, V5–148, Postfach: V3–128 (44) (Denny Otten)
Di. 16–18, V4–119, Postfach: V3–128 (114) (Alina Girod)

Aufgabe 21:

Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$u' = |u^2 + t|, \quad u(0) = 1 \tag{1}$$

wobei $u \in \mathbb{R}$ und $t \in [-2, 2]$.

(a) Berechnen und skizzieren Sie den Eulerschen Polygonzug zur AWA (1) mit der Zerlegung $\{t_i = i : i = -2, -1, 0, 1, 2\}$.

(b) Zeigen Sie, dass der Fortsetzungssatz auf die AWA (1) mit $\Omega = (-2, 2) \times \mathbb{R}$ anwendbar ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 22:

Sei u_ε Lösung der Anfangswertaufgabe

$$u_\varepsilon' = \big(t^2 + \sin(t)\big)u_\varepsilon, \quad u_\varepsilon(0) = 2 + \varepsilon.$$

Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$\sup_{0 \le t \le n\pi} |u_0(t) - u_\varepsilon(t)| \le C_n \varepsilon,$$

wobei insbesondere die (von n abhängige) Konstante C_n zu bestimmen ist.

(6 Punkte)

— Bitte wenden —

Aufgabe 23:

Sei $u(t, u_0, \lambda),\ t \geq 0$, Lösung des zweidimensionalen parameterabhängigen Systems

$$\begin{aligned} u_1' &= -u_2 - u_1(u_1^2 + u_2^2 - \lambda) \\ u_2' &= u_1 - u_2(u_1^2 + u_2^2 - \lambda) \end{aligned} \quad , \qquad \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} = u_0 = \begin{pmatrix} u_{01} \\ u_{02} \end{pmatrix} .$$

Zeigen Sie, dass die Lösung der AWA mit Parameter $\lambda = 1$ zum Anfangswert $u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ die folgende Form hat

$$u\left(t, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, 1\right) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} .$$

Geben Sie explizit die lineare Anfangswertaufgabe an, die von der Funktion

$$v(t) := \frac{\partial u}{\partial \lambda}\left(t, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, 1\right)$$

gelöst wird.

(6 Punkte)