Aufgaben zu
Gewöhnliche Differentialgleichungen
Sommersemester 2014

W.–J. Beyn
A. Girod

Abgabe: Mittwoch, 11.06.2014, 8:30 Uhr

Übungsgruppen: Do. 14–16, V5–148, Postfach: V3–128 (36) (Nils Strunk)
Do. 18–20, V5–148, Postfach: V3–128 (215) (Jochen Röndigs)
Di. 12–14, V5–148, Postfach: V3–128 (44) (Denny Otten)
Di. 16–18, V4–119, Postfach: V3–128 (114) (Alina Girod)

Aufgabe 24:

Sei $u(t, u_0, \lambda),\ t > 0$, Lösung des zweidimensionalen parameterabhängigen Systems

$$\begin{aligned} u_1' &= -u_1^2 - u_2^2 - u_1 u_2 \lambda \\ u_2' &= \tfrac{1}{32} u_1^2 + \tfrac{1}{8} u_2^2 - \tfrac{1}{16} u_1 u_2 \lambda \end{aligned}, \qquad \begin{pmatrix} u_1(1) \\ u_2(1) \end{pmatrix} = u_0 = \begin{pmatrix} u_{01} \\ u_{02} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Lösung der AWA mit Parameter $\lambda = 2$ zum Anfangswert $u_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ die folgende Form hat

$$u\left(t, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}, 2\right) = \begin{pmatrix} \frac{4}{t} \\ -\frac{2}{t} \end{pmatrix}.$$

Geben Sie explizit die lineare Anfangswertaufgabe an, die von der matrixwertigen Funktion

$$Y(t) := \frac{\partial u}{\partial u_0}\left(t, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}, 2\right)$$

gelöst wird. (6 Punkte)

Aufgabe 25:

$Y(t)$ sei bei $t = 1$ normierte Fundamentalmatrix des linearen Systems

$$u' = 3 \begin{pmatrix} \cos(2t) & -\sin(2t) \\ \sin(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix} u.$$

Berechnen Sie $\det(Y(0))$.

(6 Punkte)

— Bitte wenden —

Aufgabe 26:

Gegeben ist ein Intervall J und eine stetige Funktion $A : J \to \mathbb{R}^{n,n}$.
Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Ist Φ eine Fundamentalmatrix von $u' = Au$, dann ist $\Psi = (\Phi^T)^{-1}$ eine Fundamentalmatrix von $u' = -A^T u$.

(ii) Ψ ist eine Fundamentalmatrix von $u' = -A^T u$ genau dann, wenn für alle Fundamentalmatrizen Φ von $u' = Au$ die Beziehung

$$\Psi^T(t)\Phi(t) = C \quad \text{für alle } t \in J$$

mit einer von t unabhängigen, regulären Matrix C gilt.

(6 Punkte)