Aufgaben zu
Gewöhnliche Differentialgleichungen

W.–J. Beyn
A. Girod

Sommersemester 2014

Abgabe: Mittwoch, 18.06.2014, 8:30 Uhr

Übungsgruppen: Do. 14–16, V5–148, Postfach: V3–128 (36) (Nils Strunk)
Do. 18–20, V5–148, Postfach: V3–128 (215) (Jochen Röndigs)
Di. 12–14, V5–148, Postfach: V3–128 (44) (Denny Otten)
Di. 16–18, V4–119, Postfach: V3–128 (114) (Alina Girod)

Aufgabe 27:

Gegeben sei das lineare zweidimensionale System

$$u'(t) = A(t)u(t), t > 0, \quad A(t) = \begin{pmatrix} t^{-1} & -1 \\ t^{-2} & 2t^{-1} \end{pmatrix}$$

mit der (in der Vorlesung konstruierten) Fundamentalmatrix

$$Y(t) = \begin{pmatrix} t^2(1 - \ln t) & -t^2 \ln t \\ t \ln t & t(1 + \ln t) \end{pmatrix}, \quad t > 0.$$

Berechnen Sie

(i) die bei $t = e$ normierte Fundamentalmatrix,

(ii) die Lösung der inhomogenen Anfangswertaufgabe

$$u' = A(t)u + \begin{pmatrix} t^3 \\ -t^2 \end{pmatrix}, t > 0, \quad u(1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(6 Punkte)

Aufgabe 28:

Sei $Y(t), t \in J$ die bei $t_0 \in J$ normierte Fundamentalmatrix des linearen Systems

$$u'(t) = A(t)u(t), \quad A \in C(J, \mathbb{R}^{n \times n}).$$

Man stelle die Integralgleichung auf, die von Y erfüllt wird.
Dann zeige man für jede einer Vektornorm $|\cdot|$ in $\mathbb{R}^n$ zugeordnete Matrixnorm $|B| = \sup_{|u| \leq 1} |Bu|$ die Abschätzung

$$|Y(t)| \leq \exp(|\int_{t_0}^{t} |A(s)| ds|), \; t \in J.$$

(6 Punkte)

— Bitte wenden —

Aufgabe 29:

Gegeben sei das lineare Differentialgleichungssystem

$$u' = \frac{1}{t^2+t}\begin{pmatrix} 3t+t^2 & 2te^{-t} \\ e^t & 1+2t+2t^2 \end{pmatrix} u. \tag{1}$$

Führen Sie die folgenden Schritte zur Berechnung eines Fundamentalsystems für $t > 0$ durch:

(i) Bestimmen Sie eine spezielle Lösung der Form

$$\tilde{u}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\beta t} \\ \gamma \mathrm{e}^{\delta t} \end{pmatrix},$$

durch geeignete Wahl der Koeffizienten $\beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

(ii) Verwenden Sie Teil (i) und reduzieren mit dem Verfahren von d'Alembert auf eine skalare Differentialgleichung. Lösen Sie diese reduzierte Differentialgleichung und geben dann ein Fundamentalsystem des Systems (1) an.

(6 Punkte)