Aufgaben zu
Gewöhnliche Differentialgleichungen
Sommersemester 2014

W.–J. Beyn
A. Girod

Abgabe: Mittwoch, 25.06.2014, 8:30 Uhr

Übungsgruppen: Do. 14–16, V5–148, Postfach: V3–128 (36) (Nils Strunk)
Do. 18–20, V5–148, Postfach: V3–128 (215) (Jochen Röndigs)
Di. 12–14, V5–148, Postfach: V3–128 (44) (Denny Otten)
Di. 16–18, V4–119, Postfach: V3–128 (114) (Alina Girod)

Aufgabe 30:

Gegeben sei das lineare zweidimensionale System

$$u'(t) = A(t)u(t), t \in \mathbb{R}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die bei $t = 0$ normierte Fundamentalmatrix $Y(t), t \in \mathbb{R}$ sowie die Matrix $Z(t) = \exp(\int_0^t A(s)ds), t \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $Z(t), t \in \mathbb{R}$ keine Fundamentalmatrix ist, also insbesondere nicht mit $Y(t)$ übereinstimmt.

(6 Punkte)

Aufgabe 31:

Berechnen Sie eine reelle (nicht notwendig bei 0 normierte) Fundamentalmatrix des Differentialgleichungssystems $u' = Au$ für die folgenden Matrizen A

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

(6 Punkte)

Aufgabe 32:

Für die 2×2-Matrizen

$$A(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

berechne man $Y(t, \varepsilon) = e^{tA(\varepsilon)}, t \in \mathbb{R}$ in den Fällen $\varepsilon < 0$, $\varepsilon = 0$, $\varepsilon > 0$.
Durch direkte Abschätzung (ohne Verwendung der allgemeinen Sätze über die stetige Abhängigkeit von Parametern) zeige man die punktweise Konvergenz

$$\lim_{\varepsilon \to 0} Y(t, \varepsilon) = Y(t, 0) \quad \text{für jedes } t \in \mathbb{R}.$$

(6 Punkte)