

Aufgaben zu Gewöhnliche Differentialgleichungen Sommersemester 2014

W.-J. Beyn
A. Girod

Abgabe: Mittwoch, 02.07.2014, 8:30 Uhr

Übungsgruppen: Do. 14–16, V5–148, Postfach: V3–128 (36) (Nils Strunk)
Do. 18–20, V5–148, Postfach: V3–128 (215) (Jochen Röndigs)
Di. 12–14, V5–148, Postfach: V3–128 (44) (Denny Otten)
Di. 16–18, V4–119, Postfach: V3–128 (114) (Alina Girod)

Aufgabe 33:

(i) Berechnen Sie den Evolutionsoperator des Systems

$$u' = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} u.$$

(ii) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem zu

$$Lu = u'' - 2u' + 5u,$$

und lösen Sie damit die Anfangswertaufgabe

$$Lu = 0, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = 0.$$

(6 Punkte)

Aufgabe 34:

Beweisen Sie für $A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$ die Eulerschen Formeln

$$e^{iA} = \cos A + i \sin A,$$

$$\cos A = \frac{1}{2} (e^{iA} + e^{-iA}), \quad \sin A = \frac{1}{2i} (e^{iA} - e^{-iA}),$$

sowie die Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \cos(A + B) &= \cos A \cos B - \sin A \sin B, \\ \sin(A + B) &= \sin A \cos B + \cos A \sin B, \end{aligned}$$

falls A und B vertauschbar sind.

(6 Punkte)

– bitte wenden –

Aufgabe 35:

Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $A \in C(J, \mathbb{R}^{n \times n})$ gegeben mit

$$A(t)A(s) = A(s)A(t) \quad \text{für alle } s, t \in J.$$

Zeigen Sie, dass

$$Y(t) = \exp(B(t)), \quad B(t) = \int_{t_0}^t A(s)ds, \quad t \in J$$

die bei t_0 normierte Fundamentalmatrix von $u' = A(\cdot)u$ ist.

Ist dieses Resultat auf die Beispiele aus Aufgabe 25 bzw. 30 anwendbar ?

Hinweis: Zunächst zeige man $A(t)B(t) = B(t)A(t)$ für alle $t \in J$, dann differenziere man die zu $\exp(B(t))$ gehörige Reihe gliedweise.

(6 Punkte)