

Attraktoren für Finite-Elemente Diskretisierungen parabolischer Differentialgleichungen

Denny Otten

Fakultät für numerische Mathematik
Universität Bielefeld

Bielefeld, 30. Januar 2009

Übersicht

Kurze Einführung in semilineare parabolische ARWP

Lösbarkeit des kontinuierlichen Problems

Räumliche Diskretisierung mit FEM

Langzeitverhalten und globale Attraktoren

FEM am Modellbeispiel der Chafee-Infante-Gleichung

Übersicht

Kurze Einführung in semilineare parabolische ARWP

Lösbarkeit des kontinuierlichen Problems

Räumliche Diskretisierung mit FEM

Langzeitverhalten und globale Attraktoren

FEM am Modellbeispiel der Chafee-Infante-Gleichung

Semilineares parabolisches ARWP, Reaktions-Diffusions-Gleichung (RDG)

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 1, 2, 3$) konvexes polygonales Gebiet (oder beschränktes glattes Gebiet mit C^2 -Rand). Betrachte die **Reaktions-Diffusions-Gleichung (RDG)**

$$\begin{aligned}u_t(x, t) - D\Delta u(x, t) &= f(u(x, t)) & , (x, t) \in \Omega \times]0, T[\\u(x, t) &= 0 & , (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T[\\u(x, 0) &= u_0(x) & , (x, t) \in \Omega \times \{t = 0\}\end{aligned}$$

wobei

$u_0 : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ glatt mit $u_0|_{\partial\Omega} = 0$ (**Anfangswertfunktion**)

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (nichtlinearer **Reaktionsterm**)

$D \in \mathbb{R}$ (konstanter **Diffusionskoeffizient**, hier: $D = 1$)

Gesucht:

$u : \bar{\Omega} \times [0, T[\rightarrow \mathbb{R}$ mit $u(x, t)$ erfüllt obiges ARWP

Beispiel: Die Chafee-Infante-Gleichung

Sei $\lambda \in]0, +\infty[$ beliebig, aber fest. Die RDG

$$\begin{aligned}u_t(x, t) - \Delta u(x, t) &= \lambda \left(u(x, t) - u(x, t)^3 \right) & , (x, t) \in \Omega \times]0, T[\\u(x, t) &= 0 & , (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T[\\u(x, 0) &= u_0(x) & , (x, t) \in \Omega \times \{t = 0\}\end{aligned}$$

mit dem nichtlinearen Reaktionsterm

$$f(u) = \lambda (u - u^3)$$

heißt **Chafee-Infante-Gleichung**, benannt nach

Prof. Dr. Nathaniel („Nat“) L. Chafee

und

Prof. Dr. Ettore („Jim“) Ferrari Infante

Motivation

Fragen:

- ▶ Gibt es einen (globalen) Attraktor $\mathcal{A} \subset H_0^1(\Omega)$?

Motivation

Fragen:

- ▶ Gibt es einen (globalen) Attraktor $\mathcal{A} \subset H_0^1(\Omega)$?
- ▶ Existieren (globale) Attraktoren $\mathcal{A}_h \subset \mathcal{V}_h \subset H_0^1(\Omega)$ ($h \in I$) für die FE-Diskretisierung?

Motivation

Fragen:

- ▶ Gibt es einen (globalen) Attraktor $\mathcal{A} \subset H_0^1(\Omega)$?
- ▶ Existieren (globale) Attraktoren $\mathcal{A}_h \subset \mathcal{V}_h \subset H_0^1(\Omega)$ ($h \in I$) für die FE-Diskretisierung?
- ▶ Wie ist die Beziehung zwischen \mathcal{A}_h und \mathcal{A} (speziell für $h \rightarrow 0$)?

Motivation

Fragen:

- ▶ Gibt es einen (globalen) Attraktor $\mathcal{A} \subset H_0^1(\Omega)$?
- ▶ Existieren (globale) Attraktoren $\mathcal{A}_h \subset \mathcal{V}_h \subset H_0^1(\Omega)$ ($h \in I$) für die FE-Diskretisierung?
- ▶ Wie ist die Beziehung zwischen \mathcal{A}_h und \mathcal{A} (speziell für $h \rightarrow 0$)?

Hauptresultat:

- ▶ Der globale Attraktor der RDG ist oberhalbstetig unter FE-Diskretisierung.

Literatur

- (A.S.) *Perturbation theory for infinite dimensional dynamical systems*. Theory and numerics of ordinary and partial differential equations, 1995.
- (S.L.) *Numerical analysis of semilinear parabolic problems*. Chalmers University and Göteborg University, 1992.
- (J.R.) *Infinite dimensional dynamical systems: An introduction to dissipative parabolic PDEs and the theory of global attractors*. Cambridge University Press, 2001.
- (D.H.) *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 840, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1981.

Übersicht

Kurze Einführung in semilineare parabolische ARWP

Lösbarkeit des kontinuierlichen Problems

Räumliche Diskretisierung mit FEM

Langzeitverhalten und globale Attraktoren

FEM am Modellbeispiel der Chafee-Infante-Gleichung

Generalvoraussetzung 1

Generalvoraussetzung

Sei $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Falls $d \in \{2, 3\}$, so gelte zusätzlich

$$\exists C > 0: |f^{(j)}(u)| \leq C \left(1 + |u|^{\delta+1-j}\right) \quad \forall u \in \mathbb{R} \quad \forall j \in \{1, 2\}$$

wobei $\delta = 2$, falls $d = 3$ und $\delta \in [1, +\infty[$, falls $d = 2$.

Generalvoraussetzung 1

Generalvoraussetzung

Sei $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Falls $d \in \{2, 3\}$, so gelte zusätzlich

$$\exists C > 0: |f^{(j)}(u)| \leq C \left(1 + |u|^{\delta+1-j}\right) \quad \forall u \in \mathbb{R} \quad \forall j \in \{1, 2\}$$

wobei $\delta = 2$, falls $d = 3$ und $\delta \in [1, +\infty[$, falls $d = 2$.

Für **Chafee-Infante-Gleichung** mit $f(u) = \lambda(u - u^3)$ gilt $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sowie für $\delta = 2$ und $C := 6|\lambda| > 0$:

$$|f^{(j)}(u)| \leq 6|\lambda| \left(1 + |u|^{2+1-j}\right) \quad \forall u \in \mathbb{R} \quad \forall j \in \{1, 2\}$$

Operator-AWP im Raum $H_0^1(\Omega)$ (1)

Ansatz: Führe für f den nichtlinearen **Nemytskii-Operator** ein

$$F : H_0^1(\Omega) \supset B_R \rightarrow L^2(\Omega) \text{ mit } F(u)(x) := [f(u)](x) = f(u(x))$$

Operator-AWP im Raum $H_0^1(\Omega)$ (1)

Ansatz: Führe für f den nichtlinearen **Nemytskii-Operator** ein

$$F : H_0^1(\Omega) \supset B_R \rightarrow L^2(\Omega) \text{ mit } F(u)(x) := [f(u)](x) = f(u(x))$$

Konsequenz: Äquivalente Umformulierung des ARWP's zu nichtlinearen **Operator-AWP**

$$u_t(t) + Au(t) = F(u(t)) \quad , t \in]0, T[$$

$$u(0) = u_0 \in H_0^1(\Omega) \quad , t = 0$$

wobei $A := -\Delta : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ **negativer Laplace-Operator**.

Operator-AWP im Raum $H_0^1(\Omega)$ (1)

Ansatz: Führe für f den nichtlinearen **Nemytskii-Operator** ein

$$F : H_0^1(\Omega) \supset B_R \rightarrow L^2(\Omega) \text{ mit } F(u)(x) := [f(u)](x) = f(u(x))$$

Konsequenz: Äquivalente Umformulierung des ARWP's zu nichtlinearen **Operator-AWP**

$$\begin{aligned} u_t(t) + Au(t) &= F(u(t)) & , t \in]0, T[\\ u(0) &= u_0 \in H_0^1(\Omega) & , t = 0 \end{aligned}$$

wobei $A := -\Delta : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ **negativer Laplace-Operator**.

Ziel: Finde $u \in C([0, T[, H_0^1(\Omega))$, die obiges O-AWP löst.

Operator-AWP im Raum $H_0^1(\Omega)$ (1)

Ansatz: Führe für f den nichtlinearen **Nemytskii-Operator** ein

$$F : H_0^1(\Omega) \supset B_R \rightarrow L^2(\Omega) \text{ mit } F(u)(x) := [f(u)](x) = f(u(x))$$

Konsequenz: Äquivalente Umformulierung des ARWP's zu nichtlinearen **Operator-AWP**

$$\begin{aligned} u_t(t) + Au(t) &= F(u(t)) & , t \in]0, T[\\ u(0) &= u_0 \in H_0^1(\Omega) & , t = 0 \end{aligned}$$

wobei $A := -\Delta : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ **negativer Laplace-Operator**.

Ziel: Finde $u \in C([0, T[, H_0^1(\Omega))$, die obiges O-AWP löst.
Lösung des O-AWP's erfüllt (wegen **Duhamel-Prinzip**)

$$(KIG) \quad u(t) = E(t)u_0 + \int_0^t E(t-s)F(u(s)) ds \quad \forall t \in [0, T[$$

wobei $E(t) = e^{-tA}$ Lösungsoperator des homogenen linearen O-AWP's ist.

Operator-AWP im Raum $H_0^1(\Omega)$ (2)

Fragen:

- ▶ Eindeutige Lösbarkeit der KIG?
(\longrightarrow Existenz- und Eindeigkeitssatz)

Operator-AWP im Raum $H_0^1(\Omega)$ (2)

Fragen:

- ▶ Eindeutige Lösbarkeit der KIG?
(\longrightarrow Existenz- und Eindeigkeitssatz)
- ▶ Löst Lösung der KIG auch das O-AWP?
(\longrightarrow Regularitätssatz)

Operator-AWP im Raum $H_0^1(\Omega)$ (2)

Fragen:

- ▶ Eindeutige Lösbarkeit der KIG?
(\longrightarrow Existenz- und Eindeigkeitssatz)
- ▶ Löst Lösung der KIG auch das O-AWP?
(\longrightarrow Regularitätssatz)

Definiere den maximal fortgesetzten Lösungsoperator S des O-AWP's

$$S : \mathbb{R}_+ \times H_0^1(\Omega) \supset \mathcal{D}(S) \rightarrow H_0^1(\Omega) \text{ mit } S(t)u_0 := u(t; u_0)$$

$$\mathcal{D}(S) := \{(t, u_0) \in \mathbb{R}_+ \times H_0^1(\Omega) \mid t \in [0, T_{\max}(u_0)]\}$$

Variationsformulierung (schwache Formulierung)

Multiplikation des O-AWP's mit $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ und Integration über Ω liefert mit Greensche-Formel und Nullrandbedingung für φ

$$(u_t(t), \varphi)_{L^2} + (\nabla u(t), \nabla \varphi)_{L^2} = (F(u(t)), \varphi)_{L^2} \quad \forall t \in]0, T[\\ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Wegen $H_0^1(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^1}}$ vergrößere $C_0^\infty(\Omega)$ zu $H_0^1(\Omega)$.

Schwache Formulierung: Finde $u : [0, T[\rightarrow H_0^1(\Omega)$ mit

$$(u_t(t), v)_{L^2} + (\nabla u(t), \nabla v)_{L^2} = (F(u(t)), v)_{L^2} \quad \forall t \in]0, T[\\ \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u(0) = u_0 \in H_0^1(\Omega) \quad t = 0$$

Schwache Formulierung vermeidet höhere Ableitungen.

Beachte: Lösung des O-AWP's erfüllt schwache Gleichung.

Übersicht

Kurze Einführung in semilineare parabolische ARWP

Lösbarkeit des kontinuierlichen Problems

Räumliche Diskretisierung mit FEM

Langzeitverhalten und globale Attraktoren

FEM am Modellbeispiel der Chafee-Infante-Gleichung

Der Finite-Elemente-Raum

- ▶ $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ konvexes polygonales Gebiet ($d = 1, 2, 3$)
- ▶ $\{\mathcal{T}_h\}_{h \in I}$ uniforme Familie regulärer Triangulierungen von Ω
- ▶ h maximale Kantenlänge aller d -Simplex-Elemente von \mathcal{T}_h
- ▶ $\{P_h^{(j)} \mid j = 1, \dots, N_h\}$ Menge der inneren Knoten von \mathcal{T}_h
- ▶ $\mathcal{V}_h := \{\chi \in C(\bar{\Omega}) \mid \chi|_{T_h^{(i)}} \text{ ist linear } \forall i = 1, \dots, M_h \text{ und } \chi(\mathbf{x}) = 0 \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega\} = \text{span}\{\Lambda_j \mid j = 1, \dots, N_h\}$. Hierbei ist $\Lambda_j \in C(\bar{\Omega})$ mit

$$\Lambda_j(P_h^{(i)}) := \delta_{ij} \quad \forall i, j = 1, \dots, N_h$$

Es gilt: $\mathcal{V}_h \subset H_0^1(\Omega)$ linearer endlich-dimensionaler Teilraum.

Semidiskretes Operator-AWP im FE-Raum \mathcal{V}_h (1)

Betrachte semidiskretes O-AWP

$$\begin{aligned}(u_h)_t(t) + A_h u_h(t) &= P_h F(u_h(t)) & , t \in]0, T[\\ u_h(0) &= u_{h0} \in \mathcal{V}_h & , t = 0\end{aligned}$$

wobei $A_h := -\Delta_h$ diskreter negativer Laplace-Operator und P_h orthogonale Projektion auf $L^2(\Omega)$

$$A_h : \mathcal{V}_h \rightarrow \mathcal{V}_h \text{ mit } (A_h \Psi, \chi)_{L^2} = (\nabla \Psi, \nabla \chi)_{L^2} \quad \forall \chi \in \mathcal{V}_h$$

$$P_h : L^2(\Omega) \rightarrow \mathcal{V}_h \text{ mit } (P_h \mathbf{g}, \chi)_{L^2} = (\mathbf{g}, \chi)_{L^2} \quad \forall \chi \in \mathcal{V}_h$$

Semidiskretes Operator-AWP im FE-Raum \mathcal{V}_h (1)

Betrachte **semidiskretes O-AWP**

$$\begin{aligned}(u_h)_t(t) + A_h u_h(t) &= P_h F(u_h(t)) && , t \in]0, T[\\ u_h(0) &= u_{h0} \in \mathcal{V}_h && , t = 0\end{aligned}$$

wobei $A_h := -\Delta_h$ **diskreter negativer Laplace-Operator** und P_h **orthogonale Projektion auf $L^2(\Omega)$**

$$A_h : \mathcal{V}_h \rightarrow \mathcal{V}_h \text{ mit } (A_h \Psi, \chi)_{L^2} = (\nabla \Psi, \nabla \chi)_{L^2} \quad \forall \chi \in \mathcal{V}_h$$

$$P_h : L^2(\Omega) \rightarrow \mathcal{V}_h \text{ mit } (P_h \mathbf{g}, \chi)_{L^2} = (\mathbf{g}, \chi)_{L^2} \quad \forall \chi \in \mathcal{V}_h$$

Ziel: Finde $u_h \in C([0, T[, \mathcal{V}_h)$, die obiges O-AWP löst.

Semidiskretes Operator-AWP im FE-Raum \mathcal{V}_h (1)

Betrachte **semidiskretes O-AWP**

$$\begin{aligned}(u_h)_t(t) + A_h u_h(t) &= P_h F(u_h(t)) & , t \in]0, T[\\ u_h(0) &= u_{h0} \in \mathcal{V}_h & , t = 0\end{aligned}$$

wobei $A_h := -\Delta_h$ **diskreter negativer Laplace-Operator** und P_h **orthogonale Projektion auf $L^2(\Omega)$**

$$A_h : \mathcal{V}_h \rightarrow \mathcal{V}_h \text{ mit } (A_h \Psi, \chi)_{L^2} = (\nabla \Psi, \nabla \chi)_{L^2} \quad \forall \chi \in \mathcal{V}_h$$

$$P_h : L^2(\Omega) \rightarrow \mathcal{V}_h \text{ mit } (P_h g, \chi)_{L^2} = (g, \chi)_{L^2} \quad \forall \chi \in \mathcal{V}_h$$

Ziel: Finde $u_h \in C([0, T[, \mathcal{V}_h)$, die obiges O-AWP löst.

Lösung des semidiskreten O-AWP's erfüllt

$$\begin{aligned}(\text{SIG}) \quad u_h(t) &= E_h(t) u_{h0} + \int_0^t E_h(t-s) P_h F(u_h(s)) ds \\ &\quad \forall t \in [0, T[\end{aligned}$$

wobei $E_h(t) = e^{-tA_h}$ Lösungsoperator des semidiskreten homogenen linearen O-AWP's ist.

Semidiskretes Operator-AWP im FE-Raum \mathcal{V}_h (2)

Fragen:

- ▶ Eindeutige Lösbarkeit der SIG?
(\longrightarrow Existenz- und Eindeigkeitssatz)

Semidiskretes Operator-AWP im FE-Raum \mathcal{V}_h (2)

Fragen:

- ▶ Eindeutige Lösbarkeit der SIG?
(\longrightarrow Existenz- und Eindeigkeitssatz)
- ▶ Löst Lösung der SIG auch das semidiskrete O-AWP?
(ja, da Lösung $u(t)$ in \mathcal{V}_h liegt)

Semidiskretes Operator-AWP im FE-Raum \mathcal{V}_h (2)

Fragen:

- ▶ Eindeutige Lösbarkeit der SIG?
(\longrightarrow Existenz- und Eindeigkeitssatz)
- ▶ Löst Lösung der SIG auch das semidiskrete O-AWP?
(ja, da Lösung $u(t)$ in \mathcal{V}_h liegt)

Definiere den maximal fortgesetzten Lösungsoperator S_h des semidiskreten O-AWP's

$$S_h : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{V}_h \supset \mathcal{D}(S_h) \rightarrow \mathcal{V}_h \text{ mit } S_h(t)u_{h0} := u_h(t; u_{h0})$$

$$\mathcal{D}(S_h) := \{(t, u_{h0}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{V}_h \mid t \in [0, T_{max}(u_{h0})]\}$$

Galerkin-Verfahren (Liniensystem)

Finde Lösung $u_h : [0, T[\rightarrow \mathcal{V}_h$ mit

$$\begin{aligned} ((u_h)_t(t), \chi)_{L^2} + (\nabla u_h(t), \nabla \chi)_{L^2} &= (F(u_h(t)), \chi)_{L^2} & \forall t \in]0, T[\\ & & \forall \chi \in \mathcal{V}_h \\ u_h(0) &= u_{h0} \in \mathcal{V}_h & t = 0 \end{aligned}$$

Konvergenz des FE-Verfahrens

Satz

$u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u \in C([0, T_{\max}(u_0)[, H_0^1(\Omega))$ Lösung der KIG,
 $u_{h0} \in \mathcal{V}_h$, $u_h \in C([0, T_{\max}(u_{h0})[, \mathcal{V}_h)$ Lösung der SIG. $R_1 > 0$
und $0 < t_0 < \min\{T_{\max}(u_0), T_{\max}(u_{h0})\}$ derart, dass
 $\|u(t)\|_{H^1} \leq R_1$ und $\|u_h(t)\|_{H^1} \leq R_1 \forall t \in [0, t_0]$. Dann gilt:

$$(1): \|u_h(t) - u(t)\|_{L^2} \leq C(R_1, t_0) \left(\|u_{h0} - P_h u_0\|_{L^2} + h^2 t^{-\frac{1}{2}} \right) \\ \forall t \in]0, t_0]$$

$$(2): \|u_h(t) - u(t)\|_{H^1} \leq C(R_1, t_0) t^{-\frac{1}{2}} (\|u_{h0} - P_h u_0\|_{L^2} + h) \\ \forall t \in]0, t_0]$$

Es folgt: **Konvergenz auf kompakten Zeitintervallen**: $0 < t_1 < t_0$
und $u_{h0} = P_h u_0$:

$$\|u_h(t) - u(t)\|_{H^1} \leq C(R_1, t_0, t_1) h \quad \forall t \in [t_1, t_0]$$

Übersicht

Kurze Einführung in semilineare parabolische ARWP

Lösbarkeit des kontinuierlichen Problems

Räumliche Diskretisierung mit FEM

Langzeitverhalten und globale Attraktoren

FEM am Modellbeispiel der Chafee-Infante-Gleichung

Generalvoraussetzung 2

Generalvoraussetzung

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ erfülle

$$-\kappa - \alpha_1|u|^\gamma \leq f(u)u \leq \kappa - \alpha_2|u|^\gamma \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

$$f'(u) \leq l \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

wobei $\alpha_1, \alpha_2, \kappa, l > 0$ und $\gamma \geq 2$.

Generalvoraussetzung 2

Generalvoraussetzung

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ erfülle

$$\begin{aligned} -\kappa - \alpha_1|u|^\gamma &\leq f(u)u \leq \kappa - \alpha_2|u|^\gamma \quad \forall u \in \mathbb{R} \\ f'(u) &\leq l \quad \forall u \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

wobei $\alpha_1, \alpha_2, \kappa, l > 0$ und $\gamma \geq 2$.

Für **Chafee-Infante-Gleichung** mit $f(u) = \lambda(u - u^3)$ gilt für $\alpha_1 := \lambda, \alpha_2 = \frac{\lambda}{2}, \gamma := 4, \kappa := \frac{\lambda}{2}$ und $l := \lambda$

$$\begin{aligned} -\frac{\lambda}{2} - \lambda|u|^4 &\leq f(u)u \leq \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2}|u|^4 \quad \forall u \in \mathbb{R} \\ f'(u) &\leq \lambda \quad \forall u \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Folgerungen (1)

- Existenz eines Lyapunov-Funktional \mathcal{L}

$$\mathcal{L} : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } \mathcal{L}(u) := \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 - \mathcal{F}(u(x)) \, dx$$

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{V}_h} : \mathcal{V}_h \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } \mathcal{L}(u_h) := \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u_h(x)|^2 - \mathcal{F}(u_h(x)) \, dx$$

wobei $\mathcal{F}(u) := \int_0^u f(w) \, dw$.

Folgerungen (1)

- ▶ Existenz eines Lyapunov-Funktional \mathcal{L}

$$\mathcal{L} : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } \mathcal{L}(u) := \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 - \mathcal{F}(u(x)) \, dx$$

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{V}_h} : \mathcal{V}_h \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } \mathcal{L}(u_h) := \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u_h(x)|^2 - \mathcal{F}(u_h(x)) \, dx$$

wobei $\mathcal{F}(u) := \int_0^u f(w) \, dw$.

- ▶ A-priori Beschränktheit und zeitlich globale Lösbarkeit

$$\|S(t)u_0\|_{H^1} \leq \rho(\kappa, \lambda_1, u_0, \Omega) \quad \forall t \geq 0$$

$$\|S_h(t)u_{h0}\|_{H^1} \leq \rho(\kappa, \lambda_1, u_{h0}, \Omega) \quad \forall t \geq 0 \quad \forall h \in]0, h_0]$$

$\Rightarrow (S, \mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega)), (S_h, \mathbb{R}_+, \mathcal{V}_h)$ semidynamische Systeme

Folgerungen (1)

- ▶ Existenz eines Lyapunov-Funktional \mathcal{L}

$$\mathcal{L} : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } \mathcal{L}(u) := \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 - \mathcal{F}(u(x)) \, dx$$

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{V}_h} : \mathcal{V}_h \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } \mathcal{L}(u_h) := \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u_h(x)|^2 - \mathcal{F}(u_h(x)) \, dx$$

wobei $\mathcal{F}(u) := \int_0^u f(w) \, dw$.

- ▶ A-priori Beschränktheit und zeitlich globale Lösbarkeit

$$\|S(t)u_0\|_{H^1} \leq \rho(\kappa, \lambda_1, u_0, \Omega) \quad \forall t \geq 0$$

$$\|S_h(t)u_{h0}\|_{H^1} \leq \rho(\kappa, \lambda_1, u_{h0}, \Omega) \quad \forall t \geq 0 \quad \forall h \in]0, h_0]$$

$\Rightarrow (S, \mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega)), (S_h, \mathbb{R}_+, \mathcal{V}_h)$ semidynamische Systeme

- ▶ Gleichmäßig (uniform in h) absorbierende Menge

$$\|S(t)u_0\|_{H^1} \leq R_2(\kappa, \lambda_1, l, \Omega) \quad \forall t \geq t_2(\kappa, \lambda_1, R, \Omega) \quad \forall u_0 \in B_R$$

$$\|S_h(t)u_{h0}\|_{H^1} \leq R_2(\kappa, \lambda_1, l, \Omega) \quad \forall t \geq t_2(\kappa, \lambda_1, R, \Omega)$$

$$\forall u_{h0} \in B_R \cap \mathcal{V}_h \quad \forall h \in]0, h_0]$$

$\Rightarrow (S, \mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega)), (S_h, \mathbb{R}_+, \mathcal{V}_h)$ dissipative Systeme

Folgerungen (2)

- Existenz eines globalen Attraktors \mathcal{A} (bzw. \mathcal{A}_h): $\rho > R_2$

$$\mathcal{A} = \omega(\overset{\circ}{B}_\rho) = \bigcap_{t \geq 0} S(t)\overset{\circ}{B}_\rho \quad \in H_0^1(\Omega)$$

$$\mathcal{A}_h = \omega(\overset{\circ}{B}_\rho \cap \mathcal{V}_h) = \bigcap_{t \geq 0} S_h(t)(\overset{\circ}{B}_\rho \cap \mathcal{V}_h) \quad \in \mathcal{V}_h$$

Folgerungen (2)

- ▶ Existenz eines globalen Attraktors \mathcal{A} (bzw. \mathcal{A}_h): $\rho > R_2$

$$\mathcal{A} = \omega(\overset{\circ}{B}_\rho) = \bigcap_{t \geq 0} S(t)\overset{\circ}{B}_\rho \quad \in H_0^1(\Omega)$$

$$\mathcal{A}_h = \omega(\overset{\circ}{B}_\rho \cap \mathcal{V}_h) = \bigcap_{t \geq 0} S_h(t)(\overset{\circ}{B}_\rho \cap \mathcal{V}_h) \quad \in \mathcal{V}_h$$

- ▶ **Strukturresultate** für den globalen Attraktor \mathcal{A} (bzw. \mathcal{A}_h)

$$\mathcal{A} = W^u(\mathbb{G}) \left(= \bigcup_{\Phi \in \mathbb{G}} W^u(\Phi), \text{ falls } \mathbb{G} \text{ diskret} \right)$$

$$\mathcal{A}_h = W^u(\mathbb{G}_h) \left(= \bigcup_{\Phi_h \in \mathbb{G}_h} W^u(\Phi_h), \text{ falls } \mathbb{G}_h \text{ diskret} \right)$$

Folgerungen (2)

- ▶ Existenz eines globalen Attraktors \mathcal{A} (bzw. \mathcal{A}_h): $\rho > R_2$

$$\mathcal{A} = \omega(\overset{\circ}{B}_\rho) = \bigcap_{t \geq 0} S(t)\overset{\circ}{B}_\rho \quad \in H_0^1(\Omega)$$

$$\mathcal{A}_h = \omega(\overset{\circ}{B}_\rho \cap \mathcal{V}_h) = \bigcap_{t \geq 0} S_h(t)(\overset{\circ}{B}_\rho \cap \mathcal{V}_h) \quad \in \mathcal{V}_h$$

- ▶ Strukturresultate für den globalen Attraktor \mathcal{A} (bzw. \mathcal{A}_h)

$$\mathcal{A} = W^u(\mathbb{G}) \left(= \bigcup_{\Phi \in \mathbb{G}} W^u(\Phi), \text{ falls } \mathbb{G} \text{ diskret} \right)$$

$$\mathcal{A}_h = W^u(\mathbb{G}_h) \left(= \bigcup_{\Phi_h \in \mathbb{G}_h} W^u(\Phi_h), \text{ falls } \mathbb{G}_h \text{ diskret} \right)$$

- ▶ Hauptresultat: Oberhalbstetigkeit des globalen Attraktors unter FE-Diskretisierung

Folgerungen (2)

- ▶ Existenz eines globalen Attraktors \mathcal{A} (bzw. \mathcal{A}_h): $\rho > R_2$

$$\mathcal{A} = \omega(\overset{\circ}{B}_\rho) = \bigcap_{t \geq 0} S(t)\overset{\circ}{B}_\rho \quad \in H_0^1(\Omega)$$

$$\mathcal{A}_h = \omega(\overset{\circ}{B}_\rho \cap \mathcal{V}_h) = \bigcap_{t \geq 0} S_h(t)(\overset{\circ}{B}_\rho \cap \mathcal{V}_h) \quad \in \mathcal{V}_h$$

- ▶ **Strukturresultate** für den globalen Attraktor \mathcal{A} (bzw. \mathcal{A}_h)

$$\mathcal{A} = W^u(\mathbb{G}) \left(= \bigcup_{\Phi \in \mathbb{G}} W^u(\Phi), \text{ falls } \mathbb{G} \text{ diskret} \right)$$

$$\mathcal{A}_h = W^u(\mathbb{G}_h) \left(= \bigcup_{\Phi_h \in \mathbb{G}_h} W^u(\Phi_h), \text{ falls } \mathbb{G}_h \text{ diskret} \right)$$

- ▶ **Hauptresultat**: Oberhalbstetigkeit des globalen Attraktors unter FE-Diskretisierung

Man kann zeigen: $S(\bullet)\bullet \in C^1(\mathbb{R}_+ \times H_0^1(\Omega), H_0^1(\Omega))$

Stetige Abhängigkeit der Anfangsdaten

Satz

Für jeden Radius $R > 0$ gibt es eine positive, monoton wachsende und nach unten beschränkte Funktion

$$C_1(\bullet, R) : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ mit } t \mapsto C_1(t)$$

so dass die folgende Abschätzung gilt

$$\|S(t)u_0 - S(t)v_0\|_{H^1} \leq C_1(t)\|u_0 - v_0\|_{H^1} \quad \forall u_0, v_0 \in B_R \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^*$$

Oberhalbstetigkeit des globalen Attraktors

Satz

\mathcal{A} globaler Attraktor von $(S, \mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega))$, \mathcal{A}_h globaler Attraktor von $(S_h, \mathbb{R}_+, \mathcal{V}_h) \forall 0 < h \leq h_0$. Dann gilt:

$$d_{NH}(\mathcal{A}_h, \mathcal{A}) = \sup_{u_h \in \mathcal{A}_h} \left\{ \inf_{u \in \mathcal{A}} \|u_h - u\|_{H^1} \right\} \rightarrow 0 \text{ (für } h \rightarrow 0)$$

d.h. der Attraktor \mathcal{A} der RDG ist oberhalbstetig unter FE-Diskretisierung.

Beweis (1)

Wähle $t_0 := t_2(\rho)$. Es gilt:

$$\begin{aligned}d_{\text{NH}}(\mathcal{A}_h, \mathcal{A}) &\leq d_{\text{NH}}(\mathcal{A}_h, \mathbf{S}(t)\mathcal{A}_h) + d_{\text{NH}}(\mathbf{S}(t)\mathcal{A}_h, \mathcal{A}) \\ &\leq d_{\text{NH}}(\mathbf{S}_h(t)\mathcal{A}_h, \mathbf{S}(t)\mathcal{A}_h) + d_{\text{NH}}(\mathbf{S}(t)\overset{\circ}{\mathbf{B}}_\rho, \mathcal{A}) \\ &\leq g(t)h + f(t) \quad \forall t \geq 2t_0 \quad \forall h \in]0, h_0]\end{aligned}$$

f stetig, streng monoton fallend und konvergent gegen 0

g stetig und streng monoton wachsend

Beweis (1)

Wähle $t_0 := t_2(\rho)$. Es gilt:

$$\begin{aligned}d_{\text{NH}}(\mathcal{A}_h, \mathcal{A}) &\leq d_{\text{NH}}(\mathcal{A}_h, \mathbf{S}(t)\mathcal{A}_h) + d_{\text{NH}}(\mathbf{S}(t)\mathcal{A}_h, \mathcal{A}) \\ &\leq d_{\text{NH}}(\mathbf{S}_h(t)\mathcal{A}_h, \mathbf{S}(t)\mathcal{A}_h) + d_{\text{NH}}(\mathbf{S}(t)\overset{\circ}{\mathbf{B}}_\rho, \mathcal{A}) \\ &\leq g(t)h + f(t) \quad \forall t \geq 2t_0 \quad \forall h \in]0, h_0[\end{aligned}$$

f stetig, streng monoton fallend und konvergent gegen 0

g stetig und streng monoton wachsend

$$\begin{aligned}d_{\text{NH}}(\mathbf{S}_h(t)\mathcal{A}_h, \mathbf{S}(t)\mathcal{A}_h) &= \sup_{u_h \in \mathbf{S}_h(t)\mathcal{A}_h} \left\{ \inf_{v \in \mathbf{S}(t)\mathcal{A}_h} \|u_h - v\|_{H^1} \right\} \\ &= \sup_{u_{h0} \in \mathcal{A}_h} \left\{ \inf_{v_{h0} \in \mathcal{A}_h} \|\mathbf{S}_h(t)u_{h0} - \mathbf{S}(t)v_{h0}\|_{H^1} \right\} \\ &\leq \sup_{u_{h0} \in \mathcal{A}_h} \|\mathbf{S}_h(t)u_{h0} - \mathbf{S}(t)u_{h0}\|_{H^1} \\ &\leq \sup_{u_{h0} \in \overset{\circ}{\mathbf{B}}_\rho \cap \mathcal{V}_h} \|\mathbf{S}_h(t)u_{h0} - \mathbf{S}(t)u_{h0}\|_{H^1} \\ &\leq g(t)h \quad \forall t \geq 2t_0 \quad \forall h \in]0, h_0[\end{aligned}$$

Beweis (2)

$g(t)$ wird in t_0 -Schritten aufgebaut:

- ▶ (Stetige Abhängigkeit der Anfangsdaten):

$$\exists C_1(t) = C_1(t, \rho)$$

$$\|S(t)u_0 - S(t)v_0\|_{H^1} \leq C_1(t) \|u_0 - v_0\|_{H^1} \quad \forall u_0, v_0 \in \mathring{B}_\rho \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^*$$

- ▶ (Konvergenz des FE-Verfahrens): $\exists C_2 = C_2(\rho, t_0)$

$$\|S_h(t)u_{h0} - S(t)u_0\|_{H^1} \leq C_2 h \quad \forall t \in [t_0, 2t_0]$$

Beweis (2)

$g(t)$ wird in t_0 -Schritten aufgebaut:

- ▶ (Stetige Abhängigkeit der Anfangsdaten):

$$\exists C_1(t) = C_1(t, \rho)$$

$$\|S(t)u_0 - S(t)v_0\|_{H^1} \leq C_1(t) \|u_0 - v_0\|_{H^1} \quad \forall u_0, v_0 \in \mathring{B}_\rho \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^*$$

- ▶ (Konvergenz des FE-Verfahrens): $\exists C_2 = C_2(\rho, t_0)$

$$\|S_h(t)u_{h0} - S(t)u_0\|_{H^1} \leq C_2 h \quad \forall t \in [t_0, 2t_0]$$

Damit zeigt man (g_n positive, monoton wachsende Zahlenfolge)

$$\|S_h(nt_0)u_{h0} - S(nt_0)u_{h0}\|_{H^1} \leq g_n h \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall u_{h0} \in \mathring{B}_\rho \cap \mathcal{V}_h$$

und mit der eindeutigen Darstellung $t = nt_0 + r$, $n \in \mathbb{N}$,
 $r \in [t_0, 2t_0[$ (\tilde{g}_n positive, monoton wachsende Treppenfunktion)

$$\|S_h(t)u_{h0} - S(t)u_{h0}\|_{H^1} \leq \tilde{g}_n h \quad \forall t \geq 2t_0 \quad \forall u_{h0} \in \mathring{B}_\rho \cap \mathcal{V}_h$$

Bildung einer stetigen Oberfunktion von \tilde{g}_n liefert $g(t)$.

Beweis (3)

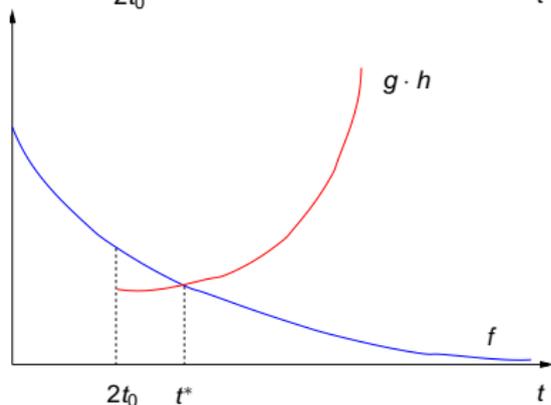
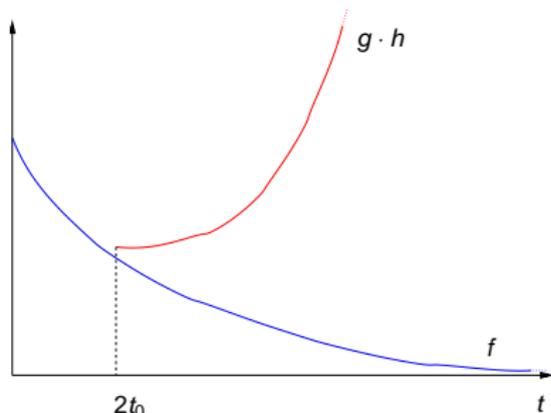
Wähle $h_C \in]0, h_0]$ derart,
dass $\forall h \in]0, h_C]$:

$$g(2t_0)h < f(2t_0)$$

Stetigkeit und Monotonie-
eigenschaften von f und g
liefern:

$\forall h \in]0, h_C] \exists t^* = t^*(h) > 2t_0 :$

$$g(t^*)h = f(t^*)$$



Beweis (4)

Offenbar gilt:

$$t^* = t^*(h) \longrightarrow \infty \text{ f\"ur } h \longrightarrow 0$$

Wegen $f(t) \rightarrow 0$ f\"ur $t \rightarrow \infty$ gilt (f\"ur $h \in]0, h_C]$)

$$d_{\text{NH}}(\mathcal{A}_h, \mathcal{A}) \leq g(t^*)h + f(t^*) = 2f(t^*) \rightarrow 0 \text{ f\"ur } h \rightarrow 0$$

Übersicht

Kurze Einführung in semilineare parabolische ARWP

Lösbarkeit des kontinuierlichen Problems

Räumliche Diskretisierung mit FEM

Langzeitverhalten und globale Attraktoren

FEM am Modellbeispiel der Chafee-Infante-Gleichung

Bifurkationsanalyse der Chafee-Infante-Gleichung

$\Omega =] - 1, 1[$. Setze

$$\lambda_n := \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

und

$$\lambda_{h,n} := \frac{1}{h^2} \cdot \frac{12 - 12 \cos\left(\frac{nh\pi}{2}\right)}{4 + 2 \cos\left(\frac{nh\pi}{2}\right)} \quad \forall n = 1, \dots, N_h$$

Die **Mengen der Bifurkationspunkte** sind

$$\text{BP} := \{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \left\{ \frac{\pi^2}{4}, \pi^2, \frac{9\pi^2}{4}, 4\pi^2, \frac{25\pi^2}{4}, \dots \right\}$$

und

$$\text{BP}_{\text{FE}} := \{\lambda_{h,n} \mid n = 1, \dots, N_h\}$$

Struktur der globalen Attraktoren: \mathcal{A} und \mathcal{A}_h bestehen ausschließlich aus heteroklinen Orbits

$$\mathcal{A} = \bigcup_{\Phi \in \mathbb{G}} W^u(\Phi) \quad \text{und} \quad \mathcal{A}_h = \bigcup_{\Phi_h \in \mathbb{G}_h} W^u(\Phi_h)$$

Globale Attraktoren der Chafee-Infante-Gleichung (1)

• Φ_0

$$0 \leq \lambda \leq \frac{\pi^2}{4}$$

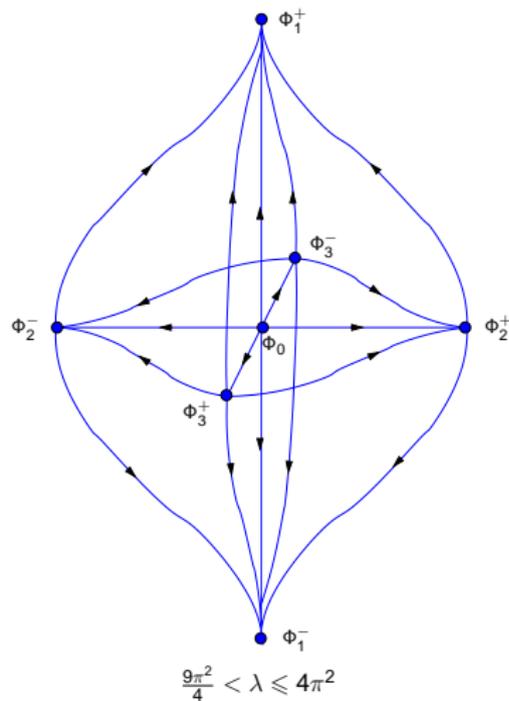
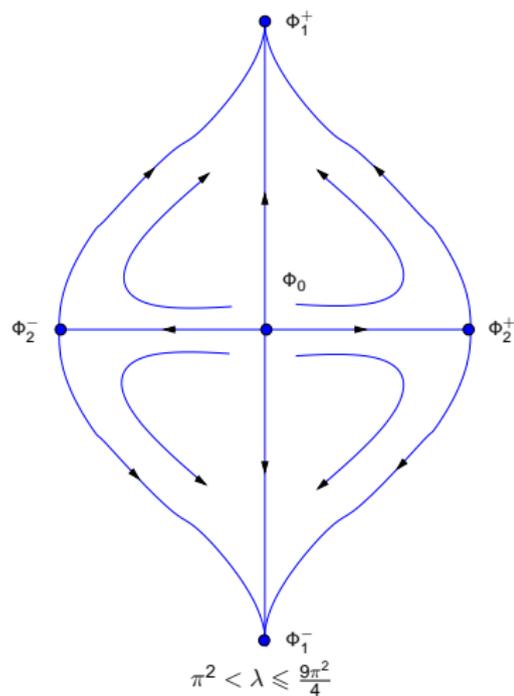
• Φ_1^+

• Φ_0

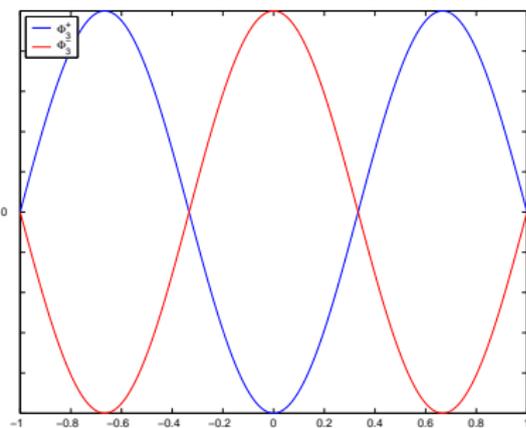
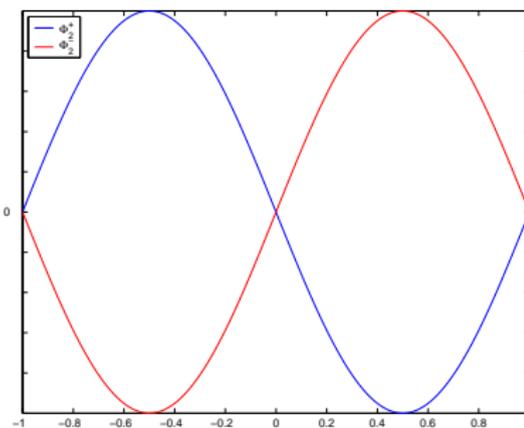
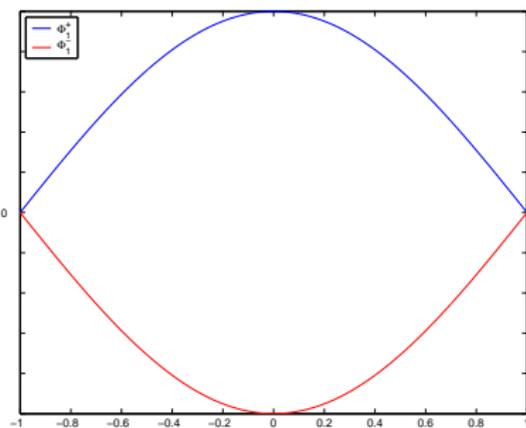
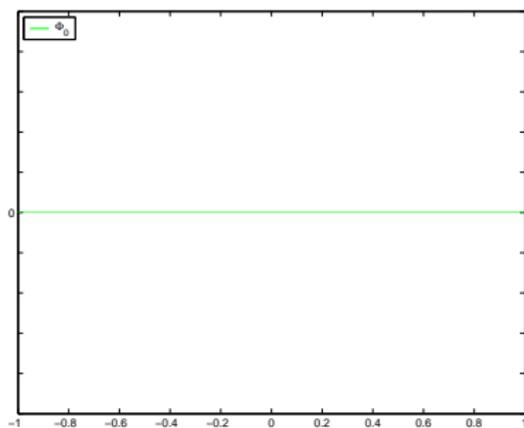
• Φ_1^-

$$\frac{\pi^2}{4} < \lambda \leq \pi^2$$

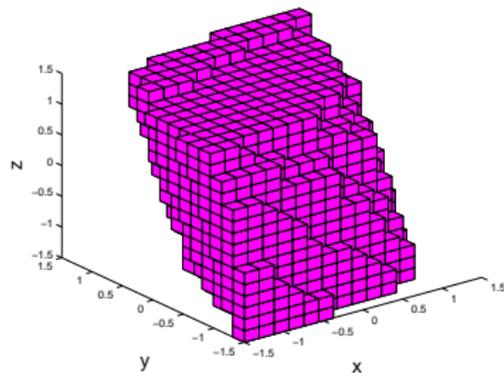
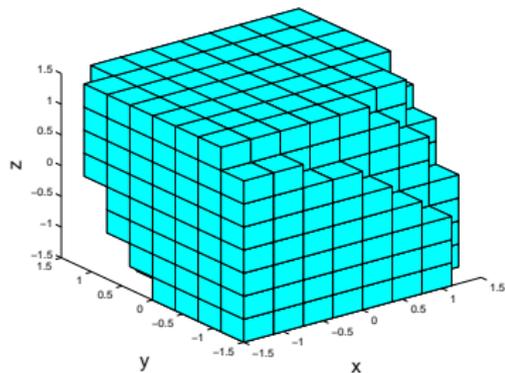
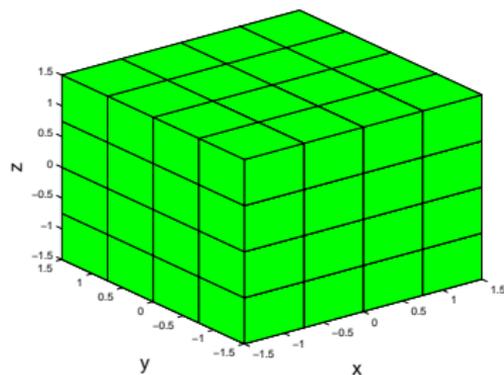
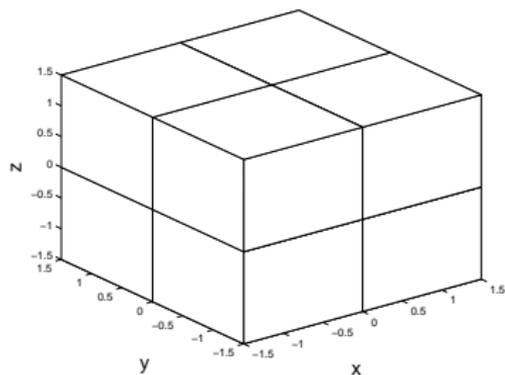
Globale Attraktoren der Chafee-Infante-Gleichung (1)



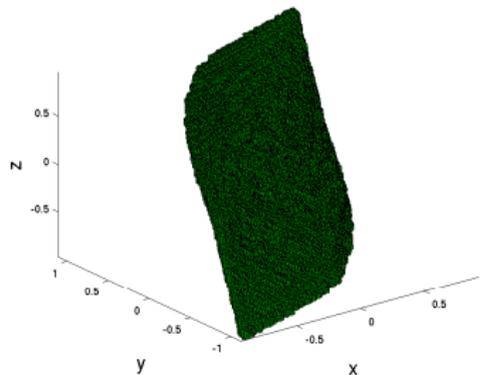
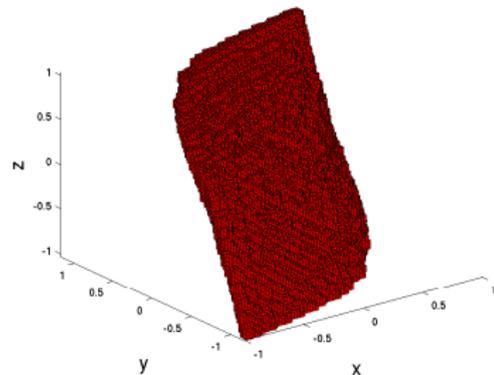
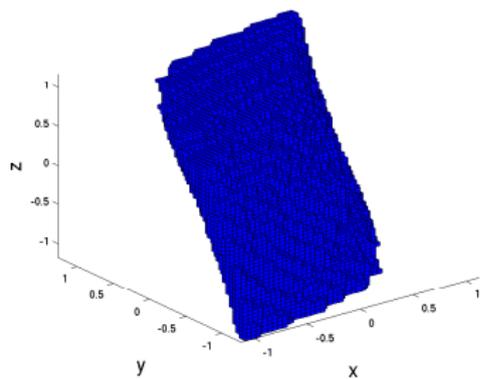
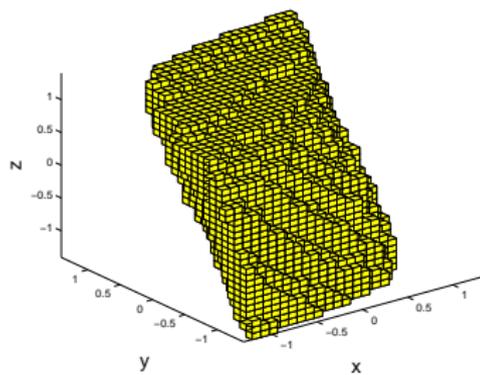
Stationäre Lösungen der Chafee-Infante-Gleichung



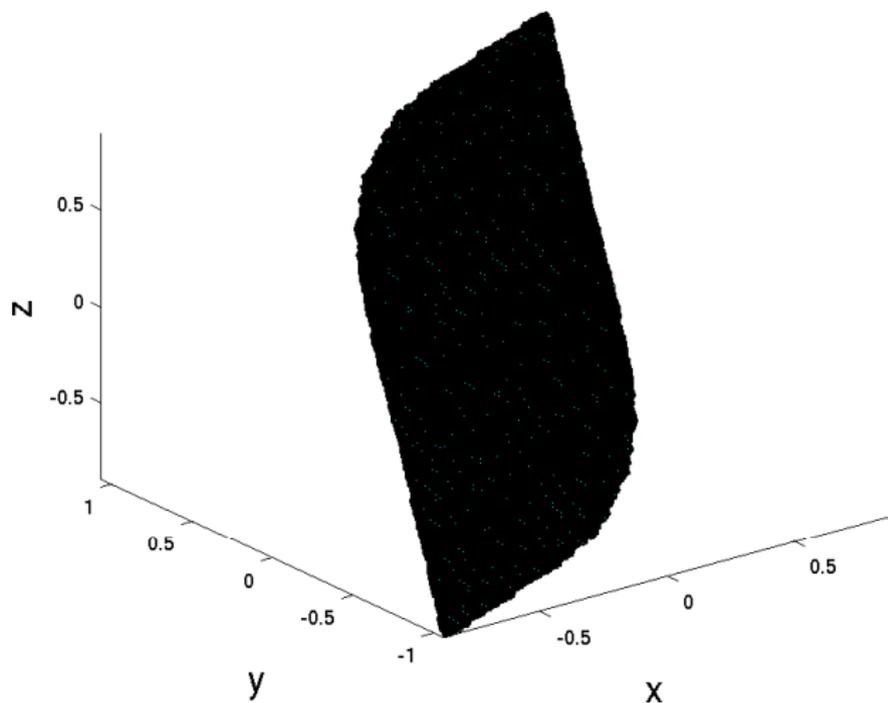
Unterteilungsalgorithmus (1): FE-Attraktor $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ für $\lambda = 7$



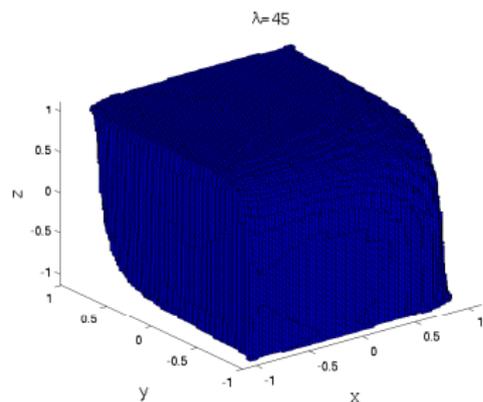
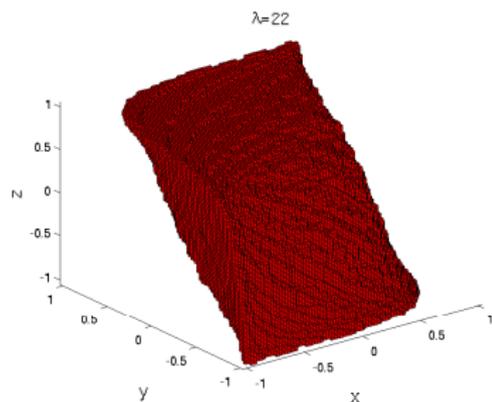
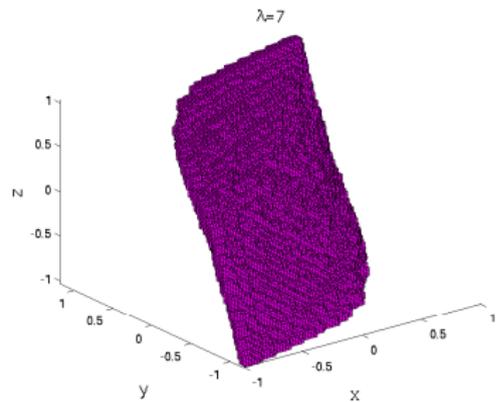
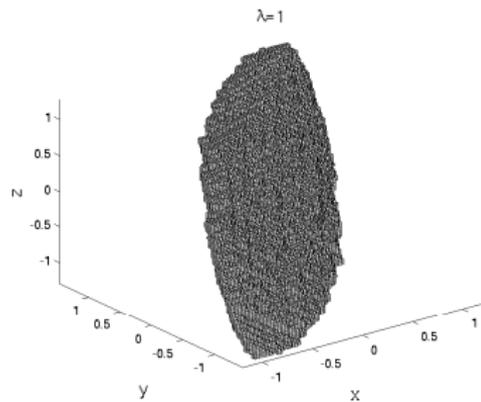
Unterteilungsalgorithmus (2): FE-Attraktor $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ für $\lambda = 7$



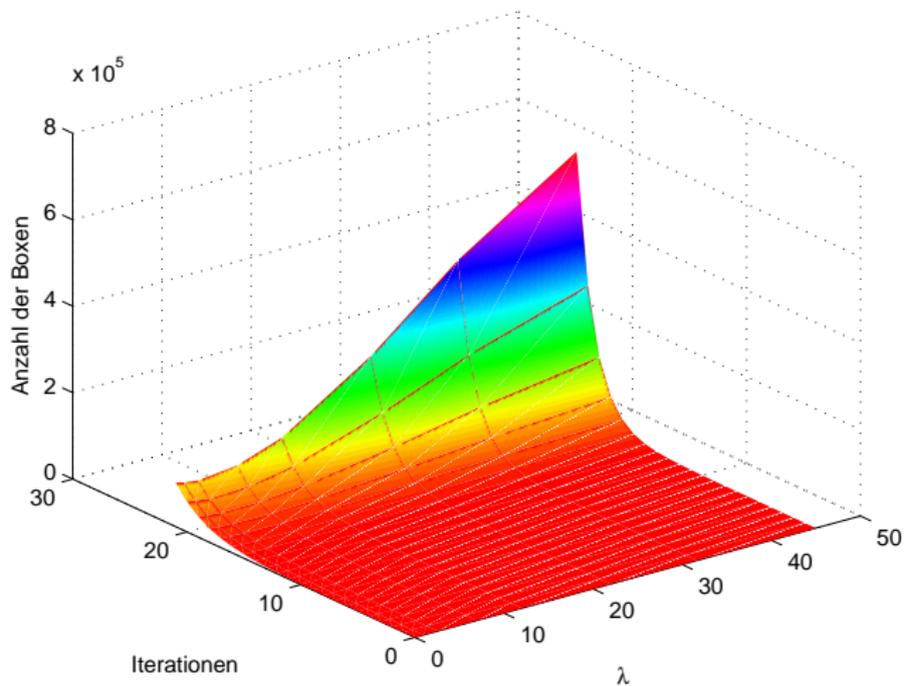
Unterteilungsalgorithmus (3): FE-Attraktor $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ für $\lambda = 7$



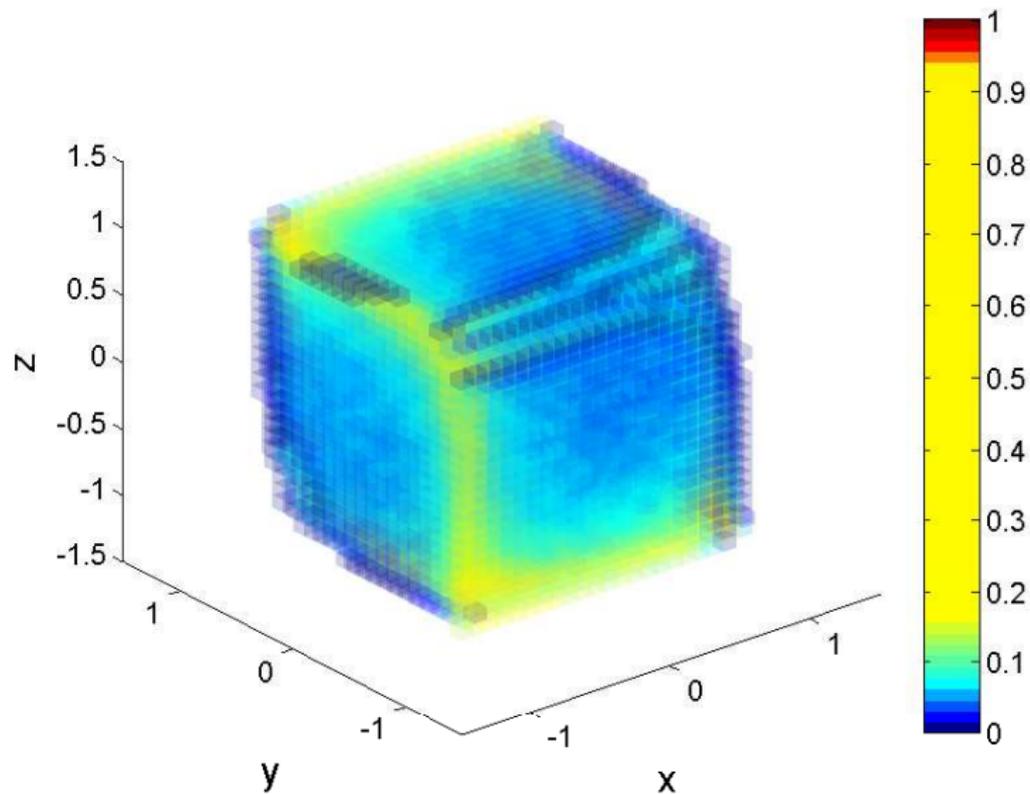
Bifurkationsparameter (1): FE-Attraktor $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$



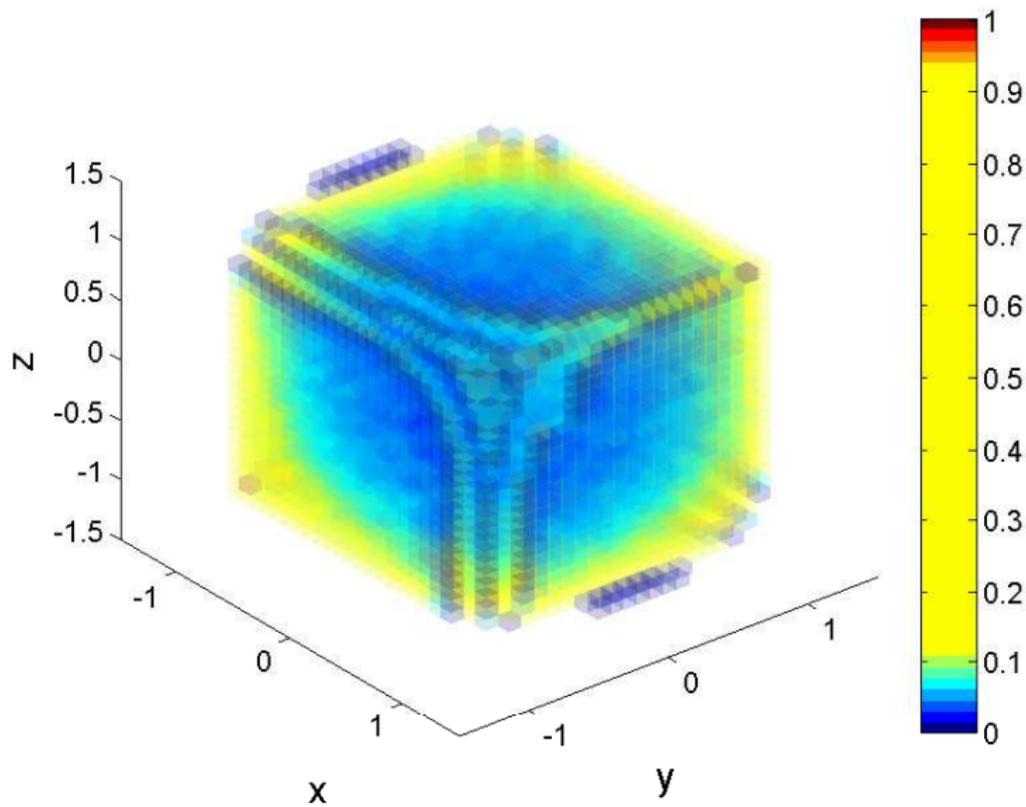
Bifurkationsparameter (2): Anzahl der Boxen des FE-Attraktors $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$



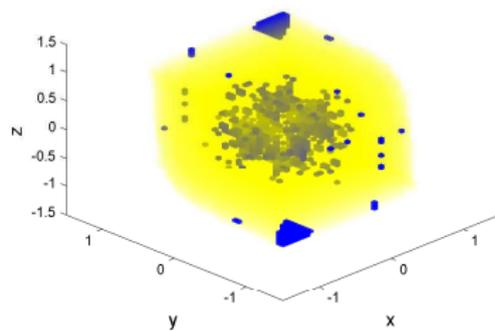
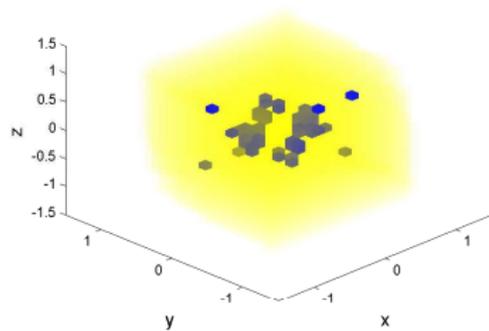
Struktur des FE-Attraktors $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}(1)$ (1)



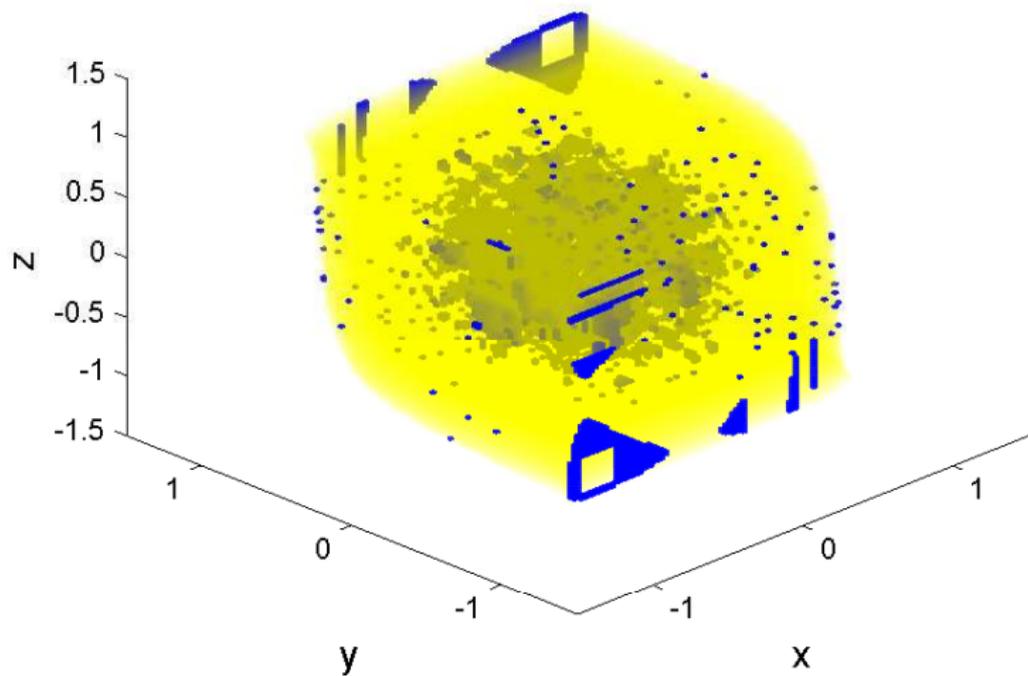
Struktur des FE-Attraktors $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ (2)



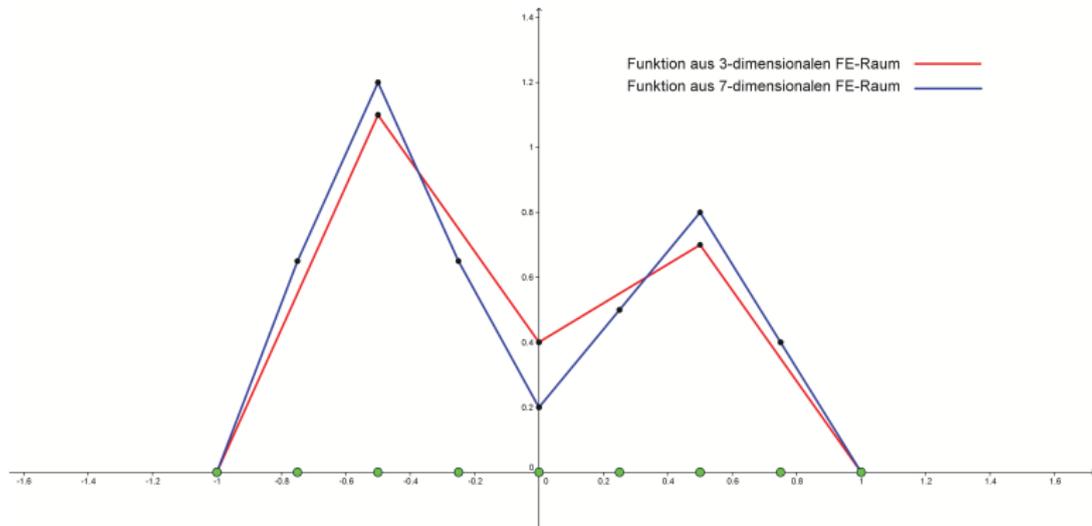
Fehlende Boxen des FE-Attraktors $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ (1)



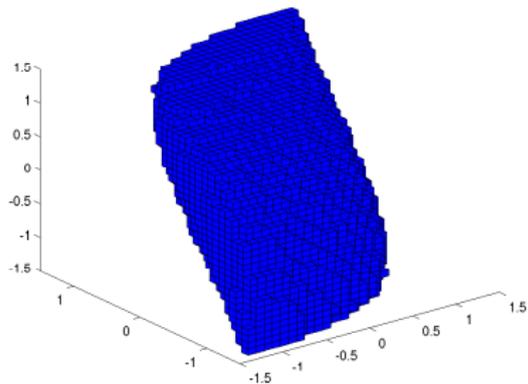
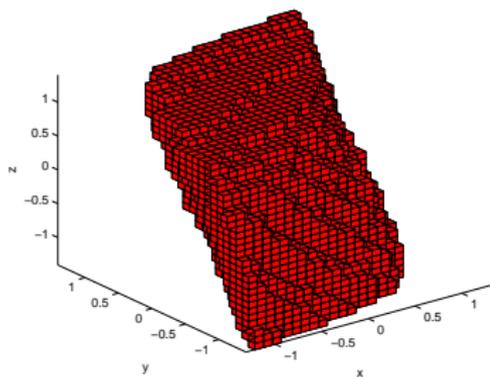
Fehlende Boxen des FE-Attraktors $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ (2)



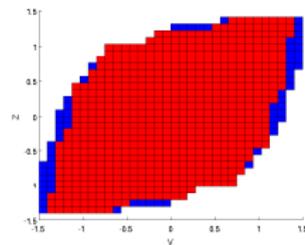
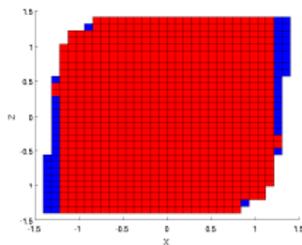
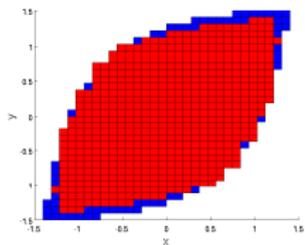
Oberhalbstetigkeit des Attraktors: 1. räumlicher Verfeinerungsschritt (1)



Oberhalbstetigkeit des Attraktors: 1. räumlicher Verfeinerungsschritt (2)



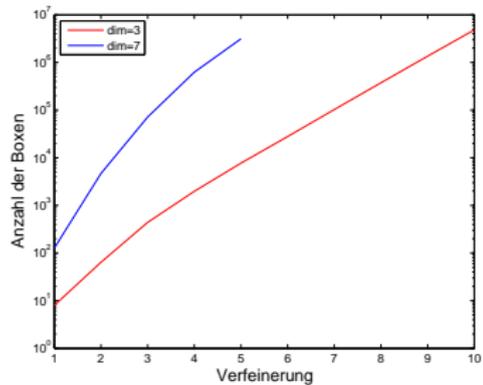
Oberhalbstetigkeit des Attraktors: 1. räumlicher Verfeinerungsschritt (3)



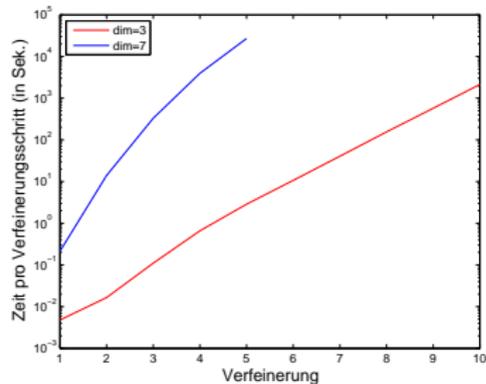
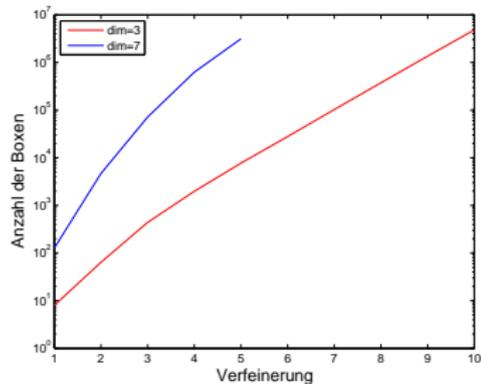
$$\Phi_{\frac{1}{2},1}^{\pm} = \pm \begin{pmatrix} 0.7321 \\ 0.9237 \\ 0.7321 \end{pmatrix} \in \mathcal{V}_{\frac{1}{2}}$$

$$\Phi_{\frac{1}{4},1}^{\pm} = \pm \begin{pmatrix} 0.4296 \\ 0.7219 \\ 0.8647 \\ 0.9047 \\ 0.8647 \\ 0.7219 \\ 0.4296 \end{pmatrix} \in \mathcal{V}_{\frac{1}{4}}$$

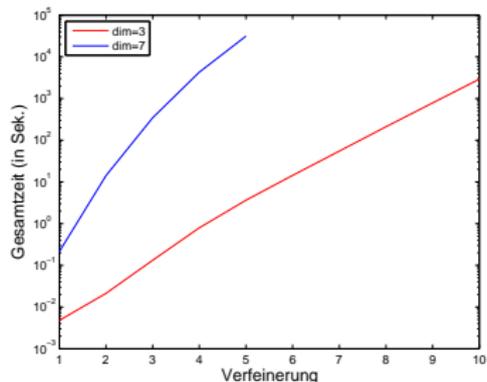
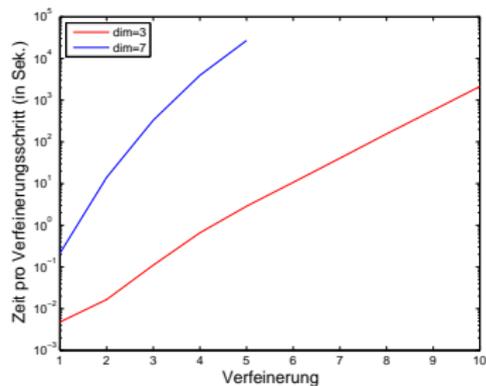
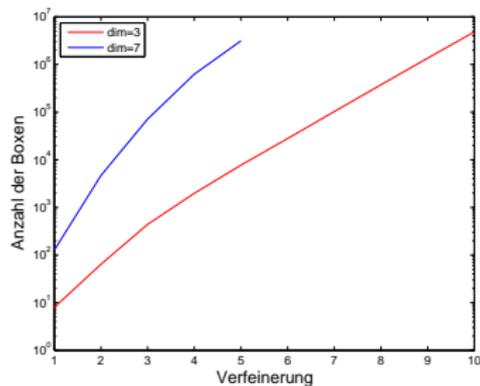
Aufwand und Optimierungsversuche



Aufwand und Optimierungsversuche



Aufwand und Optimierungsversuche



Herzlichen Dank für Ihre
Aufmerksamkeit!

Oberseminar Numerik

Projekt(e): A2

Denny Otten

Bielefeld, 30. Januar 2009

Eigenschaften der Nichtlinearität (1)

$F : H_0^1(\Omega) \supset B_R \rightarrow L^2(\Omega)$ mit $F(u)(x) := f(u(x))$

$dF(u) : H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ mit $(dF(u)v)(x) := f'(u(x))v(x)$

Satz

$\forall R > 0 \exists C(R) > 0 \forall u, v \in B_R:$

(1): $\|dF(u)z\|_{L^2} \leq C(R)\|z\|_{H^1} \quad \forall z \in H_0^1(\Omega)$

(2): $\|dF(u)z - dF(v)z\|_{L^2} \leq C(R)\|u - v\|_{H^1}\|z\|_{H^1} \quad \forall z \in H_0^1(\Omega)$

(3): $\|F(u) - F(v) - dF(u)(u - v)\|_{L^2} \leq C(R)\|u - v\|_{H^1}^2$

(4): $\|F(u) - F(v)\|_{L^2} \leq C(R)\|u - v\|_{H^1}$

$$\|F(u)\|_{L^2} \leq C(R), \quad F \in C^1(H_0^1(\Omega), L^2(\Omega))$$

(5): $\|dF(u)z\|_{H^{-1}} \leq C(R)\|z\|_{L^2} \quad \forall z \in L^2(\Omega)$

(6): $\|F(u) - F(v)\|_{H^{-1}} \leq C(R)\|u - v\|_{L^2}$

$$\|F(u)\|_{H^{-1}} \leq C(R)$$

Eigenschaften der Nichtlinearität (2)

Falls zusätzlich $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, so gilt

$$(7): dF(u)w \in H_0^1(\Omega) \quad \forall w \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

$$\begin{aligned} \|dF(u)w\|_{H^1} &\leq C(R)(\|u\|_{H^2} \|w\|_{H^1} + \|w\|_{H^2}) \\ &\leq C(R)\|w\|_{H^2} \quad \forall w \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

Existenz und Eindeutigkeit

E linearer homogener Lösungsoperator. Es gilt: $\forall l \in \{0, 1\}$,
 $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ mit $-1 \leq a \leq b \leq 2 \exists C = C(l, a, b) > 0$:

$$\|D_t^l E(t)v\|_{H^b} \leq Ct^{-l - \frac{(b-a)}{2}} \|v\|_{H^a} \quad \forall v \in \mathcal{D}(A^{\frac{a}{2}}) \quad \forall t > 0$$

Satz

(1): *(lokal Existenz und Eindeutigkeit)*

$\forall R > 0 \exists 0 < T(R) < \infty \forall u_0 \in B_R \exists_1 u \in C([0, T(R)], H_0^1(\Omega))$:
 $u(t)$ löst KIG

(2): *(globale Existenz und Eindeutigkeit)* $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $\rho > 0$,
 $T > 0$ gegeben. Falls für jede Lösung $u(t)$ auf $[0, \tau] \subset [0, T]$ der
KIG die a-priori Abschätzung

$$\|u(t)\|_{H^1} \leq \rho \quad \forall t \in [0, \tau]$$

gilt, so gibt es genau eine Lösung $u \in C([0, T], H_0^1(\Omega))$ der KIG.

Regularität

Satz

$u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u \in C([0, T_{\max}(u_0)[, H_0^1(\Omega))$ Lösung der KIG. Dann gilt $\forall R_1 > 0 \forall 0 < t_0 < T_{\max}(u_0)$ mit $\|u(t)\|_{H^1} \leq R_1 \forall t \in [0, t_0]$:

$$(1): \|u(t)\|_{H^s} \leq C(R_1, t_0) t^{-\frac{(s-1)}{2}} \quad \forall t \in]0, t_0], s = 1, 2$$

$$(2): \|u_t(t)\|_{H^s} \leq C(R_1, t_0) t^{-1-\frac{(s-1)}{2}} \quad \forall t \in]0, t_0], s = 0, 1, 2$$

$$(3): \|u_{tt}(t)\|_{L^2} \leq C(R_1, t_0) t^{-\frac{3}{2}} \quad \forall t \in]0, t_0]$$

Falls zusätzlich $u_0 \in H^2(\Omega)$ mit $\|u_0\|_{H^2} \leq R_2$, so gilt:

$$(4): \|u(t)\|_{H^s} \leq C(R_1, R_2, t_0) \quad \forall t \in [0, t_0], s = 1, 2$$

$$(5): \|u_t(t)\|_{H^s} \leq C(R_1, R_2, t_0) t^{-\frac{s}{2}} \quad \forall t \in]0, t_0], s = 0, 1, 2$$

$$(6): \|u_{tt}(t)\|_{L^2} \leq C(R_1, R_2, t_0) t^{-1} \quad \forall t \in]0, t_0]$$

Konsistenz des FE-Verfahrens (1)

Fehlerzerlegung:

$$u_h(t) - u(t) = \underbrace{u_h(t) - R_h u(t)}_{=: \theta(t)} + \underbrace{R_h u(t) - u(t)}_{=: \rho(t)}$$

H_0^1 -elliptische **Bilinearform** a und **Ritz-Projektion** R_h :

$$a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } a(u, v) := (\nabla u, \nabla v)_{L^2}$$

$$R_h : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{V}_h \text{ mit } a(R_h v, \chi) = a(v, \chi) \quad \forall \chi \in \mathcal{V}_h$$

Satz

$u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u \in C([0, T_{\max}(u_0)[, H_0^1(\Omega))$ Lösung der KIG.
 $R_1 > 0$ und $0 < t_0 < T_{\max}(u_0)$ derart, dass $\|u(t)\|_{H^1} \leq R_1$
 $\forall t \in [0, t_0]$. Dann gilt für $\rho(t) := R_h u(t) - u(t)$ sowie für $j = 0, 1$
und $s = 1, 2$

$$(1): \|\rho(t)\|_{H^j} \leq C(R_1, t_0) h^{s-j} t^{-\frac{(s-1)}{2}} \quad \forall t \in]0, t_0]$$

$$(2): \|\rho_t(t)\|_{L^2} \leq C(R_1, t_0) h^s t^{-1-\frac{(s-1)}{2}} \quad \forall t \in]0, t_0]$$

Konsistenz des FE-Verfahrens (2)

Falls zusätzlich $u_0 \in H^2(\Omega)$ mit $\|u_0\|_{H^2} \leq R_2$, so gilt

$$(3): \|\rho(t)\|_{H^j} \leq C(R_1, R_2, t_0) h^{s-j} \forall t \in [0, t_0]$$

$$(4): \|\rho_t(t)\|_{L^2} \leq C(R_1, R_2, t_0) h^s t^{-\frac{s}{2}} \forall t \in]0, t_0]$$

Stabilität des FE-Verfahrens (1)

Satz

$u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u \in C([0, T_{\max}(u_0)[, H_0^1(\Omega))$ Lösung der KIG,
 $u_{h0} \in \mathcal{V}_h$, $u_h \in C([0, T_{\max}(u_{h0})[, \mathcal{V}_h)$ Lösung der SIG. $R_1 > 0$
und $0 < t_0 < \min\{T_{\max}(u_0), T_{\max}(u_{h0})\}$ derart, dass
 $\|u(t)\|_{H^1} \leq R_1$ und $\|u_h(t)\|_{H^1} \leq R_1 \forall t \in [0, t_0]$. Dann gilt für
 $\theta(t) := u_h(t) - R_h u(t)$

$$(1): \|\theta(t)\|_{L^2} \leq C(R_1, t_0)(\|u_{h0} - P_h u_0\|_{L^2} + h^2 t^{-\frac{1}{2}}) \\ + C(R_1) \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|u_h(s) - u(s)\|_{L^2} ds \quad \forall t \in]0, t_0]$$

$$(2): \|\theta(t)\|_{H^1} \leq C(R_1, t_0) t^{-\frac{1}{2}} (\|u_{h0} - P_h u_0\|_{L^2} + h) \\ + C(R_1) \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|u_h(s) - u(s)\|_{H^1} ds \quad \forall t \in]0, t_0]$$

Stabilität des FE-Verfahrens (2)

Falls zusätzlich $u_0 \in H^2(\Omega)$ mit $\|u_0\|_{H^2} \leq R_2$, so gilt

$$(3): \|\theta(t)\|_{L^2} \leq C(R_1, R_2, t_0)(\|u_{h0} - P_h u_0\|_{L^2} + h^2) \\ + C(R_1) \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|u_h(s) - u(s)\|_{L^2} ds \quad \forall t \in]0, t_0]$$

$$(4): \|\theta(t)\|_{H^1} \leq C(R_1, R_2, t_0)(\|u_{h0} - u_0\|_{H^1} + h) \\ + C(R_1) \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|u_h(s) - u(s)\|_{H^1} ds \quad \forall t \in]0, t_0]$$

Existenz eines Lyapunov-Funktional

$$\mathcal{L} : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } \mathcal{L}(u) := \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 - \mathcal{F}(u(x)) \, dx$$

wobei $\mathcal{F}(u) := \int_0^u f(w) \, dw$.

Satz

\mathcal{L} ist ein Lyapunov-Funktional für $(S, \mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega))$, d.h.

(1): \mathcal{L} ist stetig in $H_0^1(\Omega)$

(2): $\forall u_0 \in H_0^1(\Omega) : \mathcal{L}(S(t)u_0)$ ist nichtwachsend in t

(3): $\mathcal{L}(u) \geq -C(\lambda_1)|\Omega| \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$

(4): $\mathcal{L}(u) \rightarrow 0$ für $\|u\|_{H^1} \rightarrow +\infty$

(5): $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $S(t)u_0$ ex. $\forall t \in \mathbb{R}$ und $\exists T \in \mathbb{R}$ mit
 $\mathcal{L}(S(T)u_0) = \mathcal{L}(u_0)$. Dann gilt: $Au_0 = F(u_0)$

Analog: $\mathcal{L}|_{\mathcal{V}_h}$ ist Lyapunov-Funktional für $(S_h, \mathbb{R}_+, \mathcal{V}_h)$.

Existenz gleichmäßig absorbierender Mengen

Satz

Sei $R > 0$,

$$B_R := \{u_0 \in H_0^1(\Omega) \mid \|u_0\|_{H^1} \leq R\}$$

$$R_2 := (\kappa|\Omega|(3\lambda_1^{-1} + 2l(1 + \lambda_1^{-1}) + 1))^{\frac{1}{2}}$$

$$t_2 = t_2(R) := \frac{1}{2\lambda_1} \ln \left(\frac{\lambda_1 R^2}{\kappa|\Omega|} \right) + 1$$

wobei $\kappa, l > 0$ und $\lambda_1 > 0$ kleinster Eigenwert der Helmholtz-Gleichung. Dann gilt:

$$(1): \|S(t)u_0\|_{H^1} \leq R_2 \quad \forall t \geq t_2 \quad \forall u_0 \in B_R$$

$$(2): \exists h_0 > 0 : \|S_h(t)u_{h0}\|_{H^1} \leq R_2 \quad \forall t \geq t_2 \quad \forall u_{h0} \in B_R \cap \mathcal{V}_h$$
$$\forall 0 < h \leq h_0$$

Existenz globaler Attraktoren

Satz

$\forall \rho > R_2:$

(1): $(S, \mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega))$ besitzt den globalen Attraktor

$\mathcal{A} = \omega(\overset{\circ}{B}_\rho) \subset H_0^1(\Omega)$. \mathcal{A} zieht die Menge $\overset{\circ}{B}_\rho$ gleichmäßig an und

$$\mathcal{A} = \omega(\overset{\circ}{B}_\rho) = \bigcap_{t \geq 0} S(t)\overset{\circ}{B}_\rho$$

(2): $(S_h, \mathbb{R}_+, \mathcal{V}_h)$ besitzt für jedes $0 < h \leq h_0$ den globalen

Attraktor $\mathcal{A}_h = \omega(\overset{\circ}{B}_\rho \cap \mathcal{V}_h) \subset \mathcal{V}_h$. \mathcal{A}_h zieht die Menge $\overset{\circ}{B}_\rho \cap \mathcal{V}_h$ gleichmäßig (uniform in h) an und

$$\mathcal{A}_h = \omega(\overset{\circ}{B}_\rho \cap \mathcal{V}_h) = \bigcap_{t \geq 0} S_h(t)(\overset{\circ}{B}_\rho \cap \mathcal{V}_h) \quad \forall 0 < h \leq h_0$$

Struktur der globalen Attraktoren

Satz

Sei \mathcal{A} (bzw. \mathcal{A}_h) der globale Attraktor von $(S, \mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega))$ (bzw. $S_h, \mathbb{R}_+, \mathcal{V}_h$) mit $0 < h \leq h_0$. Dann gilt:

$$\mathcal{A} = W^u(\mathbb{G}) \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{A}_h = W^u(\mathbb{G}_h)$$

wobei \mathbb{G} (bzw. \mathbb{G}_h) die Menge der Gleichgewichtspunkte bezeichnet. Falls \mathbb{G} (bzw. \mathbb{G}_h) zusätzlich diskret ist, so gilt sogar

$$\mathcal{A} = \bigcup_{\Phi \in \mathbb{G}} W^u(\Phi) \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{A}_h = \bigcup_{\Phi_h \in \mathbb{G}_h} W^u(\Phi_h)$$

und

$$\mathcal{A} = \mathcal{A} \cap \bigcup_{\Phi \in \mathbb{G}} W^s(\Phi) \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{A}_h = \mathcal{A}_h \cap \bigcup_{\Phi_h \in \mathbb{G}_h} W^s(\Phi_h)$$

Beispiele zur Lösbarkeitstheorie

(1): $f(u) = \lambda \sin(u)$

$$f(u) = \lambda \cos(u)$$

(2): $f(u) = \lambda \sin(u) \cos(u)$

$$f(u) = \lambda u \sin(u) \cos(u)$$

(3): $f(u) = \lambda(u - u^n)$, wobei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

$$f(u) = \lambda(u - u^2) \text{ (Kolmogorov-Petrovsky-Piskounov-Gleichung)}$$

(4): $f(u) = \lambda \sum_{i=0}^n a_i u^i$, wobei $a_i \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

(5): $f(u) = a + be^{\lambda u}$

$$f(u) = \lambda e^u \text{ (Zel'dovich-Frank-Kamenetskii-Gleichung)}$$

(6): $f(u) = \lambda e^{-\frac{1}{u^2}}$

Beispiele zur Langzeitanalyse

(1): $f(u) = \lambda(u + u^2 \sin(u) - u^3)$

$$f(u) = \lambda(u + u^2 \sin(u) + u^3 \cos(u) - u^5)$$

(2): $f(u) = \lambda(u - u^n)$, wobei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, n ungerade

$$f(u) = \lambda(u - u^3) \text{ (Chafee-Infante-Gleichung)}$$

(3): $f(u) = \lambda \sum_{i=0}^n a_i u^i$, wobei $a_i \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, n ungerade, $a_n < 0$

$$f(u) = \lambda(-u^2 - 3u^3) \text{ (Medizinisches-Modell)}$$

(keine Bifurkationen)

(4): $f(u) = \lambda u(1 - u)(u - \beta)$, wobei $\beta \in]0, 1[$ (Allen-Cahn-Modell)

Beispiele mit Bifurkation

(1): $f(u) = \lambda(u - u^n)$, wobei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, n ungerade

(2): $f(u) = \lambda u(\alpha - u)(u - \beta)$, wobei $\alpha > 0$, $\beta < 0$ oder $\alpha < 0$, $\beta > 0$

$f(u) = \lambda u(1 - u)(u - \beta)$, wobei $\beta \in]0, 1[$ (**Allen-Cahn-Modell**)

(3): $f(u) = \lambda \sum_{i=0}^n a_i u^i$, wobei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, n ungerade, $a_i \in \mathbb{R}$, $a_n < 0$

- $a_1 = 0$: **keine** Bifurkationen
- $a_1 \neq 0$: Bifurkationen vorhanden

(4): $f(u) = \lambda(u - u^3)$ (**Chafee-Infante-Gleichung**)

FE-Bifurkationsdiagramme für $\mathcal{V}_{\frac{1}{2}}$

