

# Wellenlösungen in Evolutionsgleichungen

## Sommersemester 2016

### Übungsblatt 4

Dr. Denny Otten

M.Sc. Christian Döding



**Ausgabe: Dienstag, 10.05.2016, 12:30 Uhr**

**Abgabe: Dienstag, 17.05.2016, 12:15 Uhr**

**Besprechung: Dienstag, 24.05.2016, 14:15-15:45 Uhr**

#### **Aufgabe 6 (Gedämpfte Wellengleichung).**

Betrachten Sie die **gedämpfte Wellengleichung**

$$(1) \quad mu_{tt} + bu_t = au_{xx} + du_x + f(u), \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0$$

mit reellen Parametern  $a, b, d, m > 0$ ,  $u = u(x, t) \in \mathbb{R}$  und  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

- Bestimmen Sie die wandernde Wellen ODE von (1).
- Transformieren Sie die wandernde Wellen ODE von (1) unter der Annahme  $a - c^2m > 0$  (Wohlgestelltheitsbedingung) auf ein 2-dimensionales System 1. Ordnung.
- Bestimmen Sie (allgemein) die Gleichgewichte der wandernden Wellen ODE von (1). Durch welche Eigenschaft sind diese charakterisiert? Bestimmen Sie anschließend die Gleichgewichte des Systems 1. Ordnung.
- Berechnen Sie die Linearisierung des Systems 1. Ordnung an einem der in (c) bestimmten Gleichgewichte.
- Bestimmen Sie die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix der Linearisierung und geben Sie die Spur  $T$  und Determinante  $D$  dieser Matrix an.
- Klassifizieren Sie in Abhängigkeit von  $T$  und  $D$  die Gleichgewichte des Systems 1. Ordnung (Sattel, Senken, Quellen, Zentren, u.s.w.). Unterscheiden Sie dabei auch zwischen den verschiedenen Typen der Senken und Quellen. Formen Sie Ihre Restriktionen dabei so um, dass Sie jeweils eine Bedingung für die Geschwindigkeit  $c$  bzw.  $f'$  erhalten.

#### **Aufgabe 7 (Gedämpfte sine-Gordon Gleichung).**

Betrachten Sie die **gedämpfte sine-Gordon Gleichung**

$$(2) \quad u_{tt} + bu_t = u_{xx} - \sin u, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0$$

für reellen Parameter  $b > 0$ . Geben Sie die zu (2) gehörige wandernde Wellen ODE an. Bestimmen Sie alle möglichen Gleichgewichtspunkte dieser ODE und führen Sie anschließend eine Typeneinteilung durch, indem Sie jedes dieser Gleichgewichte durch Anwendung von Aufgabe 6(f) klassifizieren.

#### **Aufgabe 8 (Nagumo Wellengleichung).**

Betrachten Sie die **Nagumo Wellengleichung**

$$(3) \quad mu_{tt} + u_t = u_{xx} - u(1-u)(u-b), \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0$$

für reelle Parameter  $m > 0$  und  $0 < b < 1$ . Geben Sie die zu (3) gehörige wandernde Wellen ODE an. Bestimmen Sie alle möglichen Gleichgewichtspunkte dieser ODE und führen Sie anschließend eine Typeneinteilung durch, indem Sie jedes dieser Gleichgewichte durch Anwendung von Aufgabe 6(f) klassifizieren.