

Wellenlösungen in Evolutionsgleichungen Sommersemester 2016

Übungsblatt 5

Dr. Denny Otten

M.Sc. Christian Döding



Ausgabe: Dienstag, 24.05.2016, 12:30 Uhr

Abgabe: Dienstag, 31.05.2016, 12:15 Uhr

Besprechung: Dienstag, 07.06.2016, 14:15-15:45 Uhr

Aufgabe 9 (Komplexe Ginzburg-Landau Gleichung).

Betrachten Sie die **komplexe Ginzburg-Landau Gleichung**

$$(1) \quad u_t = \alpha u_{xx} + (\mu + \beta|u|^2 + \gamma|u|^4)u, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0,$$

wobei $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} \alpha > 0$, $\operatorname{Im} \alpha \neq 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ und $u = u(x, t) \in \mathbb{C}$.

a) Verwenden Sie den Ansatz

$$u(x, t) = a(\xi)e^{i\phi(\xi) - i\theta t}, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0, \xi := x - ct$$

für $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ (**Amplitude**), $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (**Phase**) und $c, \theta \in \mathbb{R}$, und transformieren Sie (1) auf eine ODE 2. Ordnung.

b) Multiplizieren Sie die in a) gewonnenen ODE 2. Ordnung mit $\frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|^2}$ sowie mit $\frac{1}{a(\xi)}e^{-i\phi(\xi) + i\theta t}$ und leiten Sie mit Hilfe der Zerlegungen

$$\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2, \quad \beta = \beta_1 + i\beta_2, \quad \gamma = \gamma_1 + i\gamma_2, \quad \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{R},$$

die Gleichungen für den Real- und Imaginärteil her. Hinweis: Verwenden Sie die abkürzende Notation $\tilde{\alpha}_i = \frac{\alpha_i}{|\alpha|^2}$ für $i = 1, 2$.

c) Seien (a, q, k) definiert durch

$$a(\xi), \quad q(\xi) := \phi'(\xi), \quad \kappa(\xi) := \frac{a'(\xi)}{a(\xi)}.$$

Bestimmen Sie mit Hilfe der zwei in Teil b) hergeleiteten Gleichungen das von den drei Komponenten (a, q, k) erzeugte 3-dimensionale (reelle) System 1. Ordnung.

d) Bestimmen Sie die Gleichgewichte des Systems 1. Ordnung aus c) und geben Sie geeignete Bedingungen an, insofern Sie die Gleichungen nicht weiter auflösen können.