

Wellenlösungen in Evolutionsgleichungen Sommersemester 2016

Übungsblatt 6

Dr. Denny Otten

M.Sc. Christian Döding



Ausgabe: Dienstag, 14.06.2016, 12:30 Uhr

Abgabe: Dienstag, 21.06.2016, 12:15 Uhr

Besprechung: Dienstag, 28.06.2016, 14:15-15:45 Uhr

Exercise 6 (Wandernde Wellen für viskose Erhaltungssätze).

Gegeben sei eine skalare parabolische Aufgabe in Erhaltungssform (*viscous conservation law*)

$$(1) \quad u_t = u_{xx} - [f(u)]_x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0$$

mit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $u = u(x, t) \in \mathbb{R}$.

- Stellen Sie die gewöhnliche Differentialgleichung für wandernde Wellen von (1) auf.
- Seien $v_+ < v_-$ in \mathbb{R} so gegeben, dass die Gerade $S(v), v \in \mathbb{R}$ mit $S(v_{\pm}) = f(v_{\pm})$ die folgenden Bedingungen erfüllt (Skizze!):
 - $f(v) < S(v)$ für alle $v_+ < v < v_-$,
 - $f'(v_+) < S'(v_+) = S'(v_-) < f'(v_-)$.

Zeigen Sie, dass (1) eine wandernde Welle mit einem Profil v_* besitzt, das einer Differentialgleichung erster Ordnung genügt und $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} v_*(\xi) = v_{\pm}$ erfüllt. Geben Sie außerdem die Geschwindigkeit der Welle an.

Exercise 7 (Selbstähnliche Lösungen der Burgers-Gleichung).

- Zeigen Sie, dass $G = (0, \infty) \times \mathbb{R}$ eine Lie Gruppe bzgl. der folgenden Operation ist:

$$g \circ h = (g_1, g_2) \circ (h_1, h_2) = (g_1 h_1, g_2 + g_1 h_2).$$

- Ein wichtiger Spezialfall von (1) ist die viskose Burgers-Gleichung

$$(2) \quad u_t = u_{xx} - \frac{1}{2}[u^2]_x =: F(u), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0.$$

Zeigen Sie, dass F bzgl. der Gruppenaktion $[a(g)u](x) = \frac{1}{g_1}u\left(\frac{x-g_2}{g_1}\right), x \in \mathbb{R}, g \in G$ die folgende modifizierte Äquivarianzbedingung erfüllt

$$F(a(g)u) = \frac{1}{g_1^2}a(g)F(u), \quad g \in G.$$

- Verwenden Sie für ein relatives Gleichgewicht von (2) den Lösungsansatz $u(t) = a(g(\tau(t)))v_*$ mit $t \in [0, T)$. Dabei sei $g \in C^1([0, \infty), G)$ ein Gruppenorbit und $\tau \in C^1([0, T), [0, \infty))$ eine durch eine Anfangswertaufgabe definierte streng monoton wachsende Zeittransformation. Welcher Gleichung genügt das Profil v_* ?