## PRÄSENZÜBUNG WOCHE 2

Im folgenden sei $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper und $V \cong \mathbb{K}^m,\ m < \infty$, ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$.

Aufgabe 1.2. Sei $\|\cdot\|_V$ eine Halbnorm auf $V$. Zeige, dass der Nullraum

$$N := \{u \in V \mid \|u\| = 0\}$$

ein Untervektorraum von $V$ ist.

Zeige ferne, dass $\|\cdot\|_V$ eine Norm auf dem Quotientenraum $V/N$ induziert.

*Lösung.* Wir wollen zuerst zeigen, dass $N$, definiert wie in der Aufgabenstellung, ein Untervektorraum von $V$ ist. Dazu müssen wir zeigen, dass $N$ nicht leer ist, sowie dass mit zwei Elementen aus $N$ auch deren Summe und skalare Vielfache wieder in $N$ liegen.

Da $\|\cdot\|_V$ eine Halbnorm ist, gilt für die Norm des Vektors $0 \in V$: $\|0\|_V = 0$. Somit erhalten wir $0 \in N$, $N$ ist also nicht leer.

Seien $u, v \in N$, $x \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Da $\|\cdot\|_V$ eine Halbnorm ist, können wir die Subadditivität und Homogenität für folgende Abschätzungen nutzen:

$$\begin{aligned} 0 &= \|0\|_V \\ &= \|x - x\|_V \\ &\leq \|x\|_V + \|-x\|_V && \text{Subadditivität} \\ &= 2\|x\|_V \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \|u + v\|_V &\leq \|u\|_V + \|v\|_V && \text{Subadditivität} \\ &= 0 && u, v \in N \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \|\lambda u\|_V &= |\lambda| \cdot \|u\|_V && \text{Homogenität} \\ &= |\lambda| \cdot 0 && u \in N \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Die Ungleichung (1) zeigt, dass $0 \leq \|x\|$ für beliebiges $x \in V$ gilt. Hieraus folgt mit (2), dass $\|u+v\|_V = 0$ gilt, also $N$ abgeschlossen ist unter Addition. Schließlich erhalten wir aus (3) die Abgeschlossenheit von $N$ gegenüber Multiplikation mit Skalaren. $N$ ist somit ein Untervektorraum von $V$.

Als nächstes überlegen wir uns, wie der Quotientenraum aussieht. Wir definieren hierzu eine Relation $\sim_N$ auf $V$, indem wir für alle $x, y \in V$ die Relation $\sim_N$ vermittels

$$x \sim_N y \quad :\Leftrightarrow \quad x - y \in N$$

erklären. Im Quotientenraum $V/N = V/\sim_N$ identifizieren wir also alle Elemente miteinander, die sich nur um ein Element aus $N$ unterscheiden. Eine kurze Rechnung zeigt, dass es sich bei $\sim_N$ um eine Aq̈uivalenzrelation handelt, $V/\sim_N$ also ein Vektorraum ist (und zwar der Dimension $\dim V - \dim N$). Der Raum $V/\sim_N$ enthält also die Restklassen der Elemente $v \in V$, die wir mit $\bar{v} := \{v + n \mid n \in N\}$ bezeichnen wollen

Wir definieren nun die induzierte Norm auf dem Quotientenraum über die Vorschrift

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_\sim \colon V/{\sim_N} &\to \mathbb{K} \\ \bar{v} &\mapsto \|v\|_V. \end{aligned}$$

Da wir für die Restklassen bei der Bestimmung eines Vertretersystems eine Wahl haben, müssen wir zeigen, dass $\|\cdot\|_\sim$ von der Wahl des Vertreters eine Äquivalenzklasse unabhängig und damit wohldefiniert ist.

Seien $x, y \in V$ mit $\bar{x} = \bar{y}$. Die Aussage $\|\bar{x}\|_\sim = \|\bar{y}\|_\sim$ ist äquivalent zur Aussage $\|x\|_V = \|y\|_V$.

⌜

Um dies zu zeigen, verwenden wir die umgekehrte Dreicksungleichung, die wir nun beweisen wollen: für beliebige $x, y \in V$ gilt

$$\Big| \|x\|_V - \|y\|_V \Big| \leq \|x - y\|_V. \tag{4}$$

Seien $x, y \in V$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \|x\|_V &= \|x - y + y\|_V \\ &\leq \|x - y\|_V + \|y\|_V && \text{Subadditivität} \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \|y\|_V &= \|y - x + x\|_V \\ &\leq \|x - y\|_V + \|x\|_V && \text{Subadditivität, Homogenität} \end{aligned} \tag{6}$$

Die Ungleichung (5) ist äquivalent zu $\|x\|_V - \|y\|_V \leq \|x - y\|_V$, die Ungleichung (6) zu $-\Big(\|x\|_V - \|y\|_V\Big) \leq \|x - y\|_V$. Insgesamt erhalten wir die Aussage aus (4).

⌟

Die Aussage $\|x\|_V = \|y\|_V$ ist äquivalent zu $\|x\|_V - \|y\|_V = 0$. Wir nutzen die umgekehrte Dreiecksungleichung für folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} \Big| \|x\|_V - \|y\|_V \Big| &\leq \|x - y\|_V && \text{mit (4)} \\ &= 0 && x - y \in N. \end{aligned}$$

Wir wissen dabei, dass $x - y \in N$ ist, da $x$ und $y$ in derselben Äquivalenzklasse liegen. Da der Betrag auf $\mathbb{K}$ eine Norm ist, erhalten wir $\|x\|_V - \|y\|_V = 0$, die auf dem Quotientenraum definierte Abbildung ist wohldefiniert.

Um die Definitheit zu zeigen, reicht es zu sehen, dass für jedes $\bar{v} \in V/\sim$ gilt, dass aus $\|\bar{v}\|_\sim = 0$ schon $\bar{v} = \bar{0}$ folgt. Sei also $\bar{v} \in V/\sim$ mit $\|\bar{v}\|_\sim = 0$. Nach Definition von $\|\cdot\|_\sim$ gilt also $\|v\|_V = 0$, also $v = v - 0 \in N$. Die Definition von $\sim_N$ zeigt dann, dass $\bar{v} = \bar{0}$ folgt. Die induzierte Norm ist also definit.

Für $\bar{u}, \bar{v} \in V/\sim$ und $\lambda \in K$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|\bar{u} + \bar{v}\|_\sim &= \|\overline{u+v}\|_\sim && \text{Definition von } \sim_N \\
&= \|u + v\|_V && \text{Definition von } \|\cdot\|_\sim \\
&\leq \|u\|_V + \|v\|_V && \text{Subadditivität von } \|\cdot\|_V \\
&= \|\bar{u}\|_\sim + \|\bar{v}\|_\sim && \text{Definition von } \|\cdot\|_\sim,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\overline{\lambda u}\|_\sim &= \|\lambda u\|_V && \text{Definition von } \|\cdot\|_\sim \\
&= |\lambda| \cdot \|u\|_V && \text{Homogenität von } \|\cdot\|_V \\
&= |\lambda| \cdot \|\bar{u}\|_\sim && \text{Definition von } \|\cdot\|_\sim.
\end{aligned}$$

Die erste Ungleichung zeigt die Subadditivität, die zweite die Homogenität der induzierten Norm. □

Aufgabe 1.3. Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $V$. Zeige oder widerlege, dass die Abbildung

$$\begin{aligned}
d\colon V \times V &\to \mathbb{K} \\
(u, v) &\mapsto \begin{cases} \|u - v\| & \text{falls } u = \alpha v \text{ für ein } \alpha > 0 \\ \|u\| + \|v\| & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

eine Metrik auf $V$ ist.

*Lösung.* Die Abbildung $d$ ist als "französische Eisenbahnmetrik" bekannt. Wir wollen nun zeigen, dass sie tatsächlich eine Metrik ist. Wir zeigen also, dass $d$ die Anforderungen

(1) verschwindender Selbstabstand,
(2) Symmetrie und
(3) Dreiecksungleichung

erfüllt.

ad (1) Da für jeden Vektor eines Vektorraumes die Gleichung $x = 1 \cdot x$ erfüllt ist, sehen wir direkt, dass

$$\begin{aligned}
d(x, x) &= \|x - x\| \\
&= \|0\| \\
&= 0
\end{aligned}$$

für alle $x \in V$ gilt. Dies ist der verschwindende Selbstabstand.

ad (2) Seien $u, v \in V$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

*Fall 1:* es gibt ein $\alpha > 0$, so dass $u = \alpha v$ gilt. Dann gilt auch $v = \alpha^{-1} u$ und $\alpha^{-1} > 0$. Wir erhalten in diesem Fall

$$\begin{aligned}
d(u, v) &= \|u - v\| \\
&= \|v - u\| && \text{Homogenität von } \|\cdot\| \\
&= d(v, u).
\end{aligned}$$

*Fall 2:* es gibt kein $\alpha > 0$, so dass $u = \alpha v$ gilt. In diesem Fall gilt

$$\begin{aligned}
d(u, v) &= \|u\| + \|v\| \\
&= \|v\| + \|u\| && \text{Addition im Körper ist kommutativ} \\
&= d(v, u).
\end{aligned}$$

Beide Fälle zusammen ergeben die Symmetrie der Abbildung $d$.

ad (3) Seien $u, v, w \in V$. Wir unterscheiden zwei Fälle.
*Fall 1:* es gibt ein $\alpha > 0$, so dass $u = \alpha v$ gilt. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} d(u,v) &= \|u - v\| = \|u - w + w - v\| \\ &\le \left. \begin{cases} \|u-w\| + \|w-v\| & u = \alpha w \text{ für ein } \alpha > 0 \\ \|u\| + \|w\| + \|w\| + \|v\| & \text{sonst} \end{cases} \right\} = d(u,w) + d(w,v). \end{aligned}$$

Dabei ist klar, dass $u = \alpha w$ für ein $\alpha > 0$ dann und nur dann gilt, wenn auch $v = \beta w$ für ein $\beta > 0$.
*Fall 2:* es gibt kein $\alpha > 0$, so dass $u = \alpha v$ gilt. In diesem Fall gilt

$$d(u,v) = \|u\| + \|v\| = \begin{cases} \|u - w + w\| + \|v\| & (*) \\ \|u\| + \|v - w + w\| & (\star) \end{cases}$$

und wir können die folgenden Abschätzungen vornehmen.

$$(*) \le \begin{cases} \|u-w\| + \|w\| + \|v\| = d(u,w) + d(w,v) & \text{falls } u = \alpha w \text{ für ein } \alpha > 0 \\ \|u\| + \|w\| + \|w\| + \|v\| = d(u,w) + d(w,v) & \text{falls } u \ne \alpha w \ne v \text{ für alle } \alpha > 0. \end{cases}$$

$$(\star) \le \|u\| + \|w\| + \|v - w\| = d(u,w) + d(w,v) \qquad \text{falls } v = \alpha w \text{ für ein } \alpha > 0$$

Hier ist klar, dass $u = \alpha w$ für ein $\alpha > 0$ dann und nur dann gilt, wenn nicht $v = \beta w$ für ein $\beta > 0$.
Beide Fälle zusammen zeigen die Dreiecksungleichung für $d$. Somit ist $d$ eine Metrik. $\square$