H2A2, Teil b) Wie in der Übung bereits vorgestellt, definieren wir für jedes r-Tupel $(i_1, \dots, i_r) \in \{1, \dots, n\}^r$ eine Abbildung $l_{i_1,\dots,i_r} \colon V^r \to K$ die einem r-Tupel von Vektoren das Körperelement $\prod_{k=1}^{r} \alpha_{ki_k}$ zuordnet. Dabei ist die Menge $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine geordnete K-Basis von V. In der Übung zeigten wir bereits, dass die Menge B_l all dieser Abbildungen eine Basis des Raumes der r-linearen Abbildungen auf V bildet.

Wir betrachten nun den Unterraum $I \leq \mathbf{L}^r(V)$, der von den Elementen

$$\{l_{i_1,\dots,i_r} - \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot l_{\sigma(i_1),\dots,\sigma(i_r)} \mid (i_1, \dots, i_r) \in \{1, \dots, n\}^r, \sigma \in S_r\}$$

aufgespannt wird. Hierbei bezeichnet S_r die symmetrische Gruppe auf r Elementen. Wir wollen nun zeigen, dass der Quotient $\mathbf{L}^r(V)/I$ mit dem Raum der alternierenden r-linearen Abbildungen auf V identifiziert werden kann. Wir nutzen dazu die Abbildung

$$\begin{aligned} \pi_I \colon \mathbf{L}^r(V) &\to \mathbf{L}^r(V)/I \\ l &\mapsto l + I. \end{aligned}$$

Wie können wir uns die Elemente des Quotienten vorstellen? Die Erzeuger des Unterraums sind gerade so gewählt, dass im Quotienten

$$(\pi_I(l_{i_1,\dots,i_r})) - \operatorname{sgn}(\sigma)(\pi_I(l_{\sigma(i_1),\dots,\sigma(i_r)})) = 0$$

ergibt. Das heißt nichts anderes, als dass $(\pi_I(l_{i_1,\dots,i_r}))$ und $\operatorname{sgn}(\sigma)(\pi_I(l_{\sigma(i_1),\dots,\sigma(i_r)}))$ die gleiche Abbildung definieren.

Da die Elemente von B_l den Raum $\mathbf{L}^r(V)$ erzeugen, wissen wir auch, dass die Menge $\pi_i(B_l)$ ihrer Bilder unter π_I den Quotienten $\mathbf{L}^r(V)/I$ erzeugen. Da wir die Summe von zweier solcher Abbildungen sowie das Produkt solcher Abbildungen mit Körperelementen punktweise definiert haben, reicht es, die die Bilder $\pi_I(B_l)$ darauf zu prüfen, ob sie alternierend sind. Sei $(i_1, \dots, i_r) \in \{1, \dots, n\}^r$ und $(v_1, \dots, v_r) \in V^r$. Angenommen es gibt $k, l \in \{1, \dots, r\}$ mit $v_k = v_l$. Sei weiterhin $\sigma \in S_r$ die Transposition, die i_k und i_l vertauscht und alle anderen Zahlen fix lässt. Dann ist

$$\begin{aligned} &(\pi_I(l_{i_1,\dots,i_k,\dots,i_l,\dots,i_r}))(v_1, \dots, v_k, \dots, v_l, \dots, v_r) \\ &\qquad = \operatorname{sgn}(\sigma)(\pi_I(l_{\sigma(i_1),\dots,\sigma(i_k),\dots,\sigma(i_l),\dots,\sigma(i_r)}))(v_1, \dots, v_k, \dots, v_l, \dots, v_r) \\ &\qquad = -(\pi_I(l_{i_1,\dots,i_l,\dots,i_k,\dots i_r}))(v_1, \dots, v_l, \dots, v_k, \dots, v_r) \\ &\qquad = -(\pi_I(l_{i_1,\dots,i_k,\dots,i_l,\dots,i_r}))(v_1, \dots, v_k, \dots, v_l, \dots, v_r). \end{aligned}$$

Das heißt, dass die Bilder $\pi_I(B_l)$ ausgewertet an einem Tupel $(v_1, \dots, v_r) \in V^r$ schon 0 ergeben, falls zwei der Vektoren im Tupel gleich sind. Somit sind alle Elemente des Quotienten r-lineare alternierende Abbildungen. Analog zum Beweis aus der Übung, dass B_l eine Basis von $\mathbf{L}^r(V)$ ist, ergibt sich, dass die Elemente $\pi_I(B_l)$ den gesamten Quotienten erzeugen. Dabei wird entscheidend die r-Linearität genutzt. Zwei Elemente $l_{i_1,\dots i_r}, l_{j_1,\dots,j_r}$ ergeben dann unter π_I genau dann linear unabhängige Elemente des Quotienten, wenn sich die Mengen der Indizes unterscheiden. Ansonsten unterscheiden sich die beiden Bilder gemäß unserer vorherigen Überlegungen nur um ein Vorzeichen. Das heißt also kombinatorisch, wir haben so viele linear unabhängige Elemente im Quotienten, wie wir r-elementige Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$ auswählen können, also $\binom{n}{r}$ viele.