Wie versprochen ist hier ein kurzes Dokument zum Thema (naive) Mengenlehre und Abbildungen. Außerdem eine kurze Liste einiger griechischer Buchstaben.

Mengenlehre

Wie ihr sicher schon gemerkt habt, wird in der Mathematik mit Hilfe von Mengen und Operationen sowie Relationen auf ihnen gearbeitet. Was also ist eine Menge? Ich zitiere an dieser Stelle den Schöpfer der (naiven) Mengenlehre, Georg Cantor: „Unter einer ‘Menge’ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‘Elemente’ von M genannt werden) zu einem Ganzen.“ (vgl. http://de.wikipedia.org/wiki/Mengenlehre).
Ist M eine Menge, m ein Element von M, so schreiben wir auch $m \in M$. Ist hingegen m' nicht Element von M, drücken wir dies in der Form $m' \notin M$ aus. Neben Elementen können wir natürlich auch Teilmengen der Menge M betrachten. So bedeutet

- $N \subset M$ - N ist Teilmenge von M, N ist in M enthalten
- $N \supset M$ - N ist Obermenge von M, M ist in N enthalten
- $N \not\subset M$ - N ist nicht Teilmenge von M
- $N \not\supset M$ - N ist nicht Obermenge von M.

Dabei solltet ihr beachtet, dass $N \not\subset M$ nicht bedeutet, dass kein Element von N in M enthalten ist. So gilt beispielsweise $\{1, 2, 4\} \not\subset \{1, 2, 3\}$, aber $1 \in \{1, 2, 4\}$ und auch $1 \in \{1, 2, 3\}$. Wie ihr seht, können wir also eine Menge auch über ihre Elemente vollständig beschreiben. Statt dies explizit zu tun, können wir dies auch mit Hilfe von Bedingungen tun: $\{n \in \mathbb{N} \mid 0 < n < 4\} = \{1, 2, 3\}$. $\mathbb{N}$ sind dabei die natürlichen Zahlen, der senkrechte Strich trennt die „Herkunftsangabe“ der Elemente von der danach folgenden Bedingung. Alternativ wird statt des Strichs gerne auch ein Komma geschrieben.
Neben den Relationen (Teilmenge, Obermenge, Enthaltensein etc.) können wir auch Operationen auf Mengen definieren. So bedeutet $N \cup M$, dass wir die Vereinigung über die Mengen N und M bilden. Definieren wir dies als neue Menge K, in Zeichen $K := N \cup M$, so besteht K aus allen Elementen aus N sowie allen Elementen, die in M enthalten sind. Als Beispiel möge die Gleichung $\{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 4\} \cup \{1, 2, 3\}$ dienen.
Eine Art Gegenstück zur Vereinigung ist der Schnitt $N \cap M$. Dieser besteht genau aus den Elementen, die sowohl in der einen, als auch der anderen Menge enthalten sind. Hierzu nehmen wir $\{1, 2\} = \{1, 2, 4\} \cap \{1, 2, 3\}$ als Beispiel.
Neben Vereinigung und Schnitt lassen sich mit Hilfe des sogenannten cartesischen Produkts ebenfalls neue Mengen erstellen. In der Vorlesung betrachten wir vor allem die euklidische Ebene $\mathbb{E}$, die wir als cartesisches Produkt der reellen Zahlen mit sich selbst beschreiben können, in Zeichen $\mathbb{E} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. Dies sind alle Paare (x, y), bei denen x und y aus den reellen Zahlen stammen: $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. Auf diese Weise kann man jeden Punkt der Ebene eindeutig anhand seiner Koordinaten

beschreiben. Auch die in der Vorlesung betrachteten geometrischen Objekte können auf diese Weise betrachtet werden. Der Kreis $K(M,r)$ besteht aus allen Punkten $P \in \mathbb{E}$, die den Abstand r zum Punkt M haben, anders geschrieben $K(M,r) = \{P \in \mathbb{E} \mid |PM| = r\}$.

Abbildungen

Hat man sich erst einmal die Mengen ausgesucht, so kann man Abbildungen auf diesen Mengen betrachten. Eine Abbildung wird durch ihren Definitionsmenge (die Menge, von der aus abgebildet wird), ihre Zielmenge (die Menge, in die abgebildet wird), sowie einer Zuordnung von Elementen aus dem Zielbereich zu Elementen aus dem Definitionsbereich festgelegt. Für eine Abbildung, die wir f nennen wollen, die von der Menge N in die Menge M abbildet und den Elementen aus $x \in N$ die Elemente $f(x) \in M$ zuweist, schreiben wir $f: \ N \to M, \ x \mapsto f(x)$. Formal gesehen ist diese Abbildung eine Teilmenge des cartesischen Produkts $N \times M$, für die gewisse Eigenschaften gelten müssen (vgl. http://de.wikipedia.org/wiki/Funktion_(Mathematik), Abschnitt Mengentheoretische Definition). Uns interessiert allerdings nur folgendes: jedem Element des Definitionsbereichs muss genau ein Element des Zielbereichs zugeordnet werden, damit wir die Abbildung als wohldefiniert bezeichnen können. Auch wenn die Abbildung keine Umkehrabbildung zulässt (siehe weiter unten), können wir doch von Urbildern sprechen. Dabei besteht das Urbild einer Teilmenge M' des Zielbereichs gerade aus den Elementen, die auf die Elemente in M' abgebildet werden. Wir bezeichnen die Menge der Urbilder von M' unter f mit $f^{-1}(M')$. Für die Abbildung $f: \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto x^2$ ist beispielsweise $f^{-1}(\{4\}) = \{-2, 2\}$. Da die Quadrate reeller Zahlen immer nicht-negativ sind, ist die Urbildmenge jeder negativen Zahl die leere Menge, in Zeichen $f^{-1}(\{-1\}) = \varnothing$.

Abbildungen können verschiedene Eigenschaften haben. Werden allen Elementen der Definitionsmenge unterschiedliche Elemente der Zielmenge zugeordnet, ist also die Urbildmenge jedes elements der Zielmenge leer oder besteht nur aus einem Element, so nennen wir die Abbildung injektiv. Bei einer surjektiven Abbildung hat jedes Element der Zielmenge mindestens ein Urbild. Ist eine Abbildung sowohl injektiv, als auch surjektiv, so nennen wir sie bijektiv. Für bijektive Abbildungen können wir Umkehrabbildungen finden. Abbildungen werden, wie ihr bereits gemerkt habt, gerne auch mal mit griechischen Buchstaben bezeichnet (siehe nächster Abschnitt).

Man kann, gegeben geeignete Werte- und Definitionsbereiche, Abbildungen auch miteinander verketten. Dies klappt zum Beispiel bei den Abbildungen der Ebene in sich immer. Führen wir zuerst die Abbildung φ, danach die Abbildung ψ aus, so schreiben wir dafür $\psi \circ \varphi$. In diesem Fall lesen wir also die Reihenfolge von rechts nach links ab. Werten wir dies so erhaltene Verkettung an der Stelle v aus, so erhalten wir $(\psi \circ \varphi)(v) = \psi(\varphi(v))$. Wie schon vermutet wenden wir also zuerst φ auf v an, danach dann ψ auf $\varphi(v)$, das Bild von v unter φ. Dabei sollte man beachten, dass es auf die Reihenfolge ankommt. Mit anderen Worten: $(\psi \circ \varphi)(v) \neq (\varphi \circ \psi)(v)$. Man sagt, die beiden Abbildungen kommutieren im allgemeinen nicht.

Griechische Buchstaben

- α, A - alpha
- β, B - beta
- γ, Γ - gamma
- δ, Δ - delta
- ϵ, ε, E - epsilon
- ζ, Z - zeta
- η, H - eta
- $\theta, \vartheta, \Theta$ - theta
- ι, I - iota
- κ, K - kappa
- λ, Λ - lambda
- μ, M - my
- ν, N - ny
- ξ, Ξ - xi
- o, O - omicron
- π, ϖ, Π - pi
- ρ, ϱ, P - rho
- $\sigma, \varsigma, \Sigma$ - sigma
- τ, T - tau
- υ, Υ - ypsilon
- ϕ, φ, Φ - phi
- χ, X - chi
- ψ, Ψ - psi
- ω, Ω - omega