Elementare Geometrie

Skriptum zum Zusatztutorium am 01. Juli 2015 (Stand 08. Juli.2015)

Tim Kirchhoff (tim.kirchhoff@uni-bielefeld.de),
Daniel Röwe (droewe@math.uni-bielefeld.de)

Dieses Dokument ist eine grobe Zusammenfassung des Zusatztutoriums und soll einen Überblick über die behandelten Sachverhalte geben. Die Vollständigkeit und Richtigkeit ist ohne Gewähr. Notationen können abweichen.

Man beachte, dass man sich trotz ausdrucken und durchlesen des Dokumentes auch mit diesen Inhalten ausführlich (z.B. für die Klausur) beschäftigen muss.

0. Inhaltsverzeichnis:

Motivation:

Oft wurde die Frage gestellt, warum man sich mit solchen Themen auseinandersetzen solle, wenn man diese gar nicht für die Schule gebrauchen würde. Um es kurz auf den Punkt zu bringen:
Ein Wissensvorsprung ist immer gut! Ein(e) gute(r) Schüler(in) kann einem mit der passenden Frage, die fachlich über den Schulstoff hinausgeht, sonst ziemlich auflaufen lassen. Und solche Fragen können kommen.
Außerdem muss man die Schülerinnen und Schüler auf den Besuch von höheren Schulformen (Haupt-, Real-, Gesamt- oder was auch immer Schule) vorbereiten. Hier ist es doch gut zu wissen, wofür man einen bestimmten Stoff braucht. Viele Aspekte der elementaren Geometrie sind beispielsweise essentiell für die Vektorrechnung in der Sekundarstufe II, aber auch Grundlagen zu Figuren, wie Rechtecken, Rauten, Quadraten, Trapezen, Dreiecken, etc. sind wichtig für den Geometrieunterricht der Sekundarstufe I.

1. Grundkonstruktionen

Im folgenden Kapitel wiederholen wir Konstruktionen, welche man mit einem Lineal und einem Zirkel durchführen kann. Sicher kann man dies auch mit einem Geodreieck tun, jedoch ist der Gebrauch von einem Lineal und Zirkel nicht nur <u>eleganter</u>, sondern auch <u>schneller</u> und vor Allem <u>genauer</u> (!).

1.1. *Konstruktion einer Mittelsenkrechten*

<u>Merksatz</u>: (**Mittelsenkrechte**)
Eine Mittelsenkrechte ist eine Gerade, welche senkrecht (d.h. orthogonal bzw. im rechten Winkel) auf einer Strecke steht und diese halbiert. Für jeden Punkt auf der Mittelsenkrechten gilt, dass er zu beiden Eckpunkten der Strecke denselben Abstand hat.

<u>Konstruktion</u>:
Seien A,B Punkte in der Ebene.

1. Man ziehe um A Kreis K_1 und um B einen Kreis K_2 jeweils mit Radius r, wobei $r > \frac{1}{2}|AB|$
2. Ziehe eine Gerade durch die Schnittpunkte der Kreise K_1 und K_2

<u>Bemerkung</u>:
Eine Mittelsenkrechte teilt eine bestimmte Strecke in zwei gleich lange Teilstrecken und steht senkrecht auf dieser. Eine Senkrechte jedoch steht erst einmal nur senkrecht auf einer Strecke oder einer Geraden.

<u>Beachte</u>:
Der Begriff Mittelsenkrechte kann <u>nur</u> im Zusammenhang mit einer Strecke fallen!

1.2. *Konstruktion einer Senkrechten durch einen bestimmten Punkt*

Konstruktion:
Sei g eine Gerade und P ein Punkt. Man konstruiert einer Senkrechte auf g durch P, indem man:

1. Einen Kreis K_1 um P zieht, sodass man zwei Schnittpunkte S_1, S_2 mit g erhält
2. Die Mittelsenkrechte der Strecke S_1S_2 konstruiert

1.3. *Konstruktion einer Parallelen durch einen bestimmten Punkt*

Prinzip: (**Parallelenaxiom**)
Zu einer Geraden g und einem Punkt P gibt es genau eine Gerade h, welche parallel zu g ist und P enthält.

Konstruktion:
Sei g eine Gerade und P ein Punkt.

1. Ziehe um P einen Kreis K_1 mit Radius r sodass zwei Schnittpunkte mit der Geraden g entstehen.
2. Schlage um einen dieser Schnittpunkte einen weiteren Kreis K_2 mit Radius r.
3. Ziehe um einen der so entstandenen Schnittpunkte von g und K_2 einen dritten Kreis K_3 mit Radius r.
4. Ziehe nun durch den der entstandenen Schnittpunkte von K_1 und K_3, welcher nicht auf g liegt, und dem Punkt P eine Gerade h‘.
   $\Longrightarrow h' = h$

1.4. *Konstruktion eines/r Winkels/-halbierender*

Konstruktion: (**Winkel abtragen**)
Seien s,t Strahlen mit gemeinsamen Ursprung in P. Man Überträgt den Winkel $\angle$ (s,t) indem man

1. Um P einen Kreis K_1 mit bel. Radius r_1 zieht. Man erhält zwei Schnittpunkte von K_1 mit s (S) und t (T).
2. Ziehe nun um den Punkt X, an welchem der Winkel abzutragen ist, einen Kreis K_1‘ mit Radius r_1.
3. Um einen der in 2. erhaltenen Schnittpunkte ziehe nun einen Kreis K_2 mit Radius $r_2 = |ST|$
4. Ziehe nun einen von X ausgehenden Strahl durch einen in 3. erhaltenen Schnittpunkt.

Bemerkung:
Die Konstruktionsbeschreibung klingt schlimmer, als es ist. Im Grunde benutzt man zwei kongruente Dreiecke (SSS).

Konstruktion: (**Winkel halbieren**)
Seien s,t Strahlen mit gemeinsamen Ursprung in P. Man halbiert den Winkel $\angle$ (s,t) indem man…

1. einen Kreis K_1 mit bel. Radius r_1 um P zieht. Man erhält zwei Schnittpunkte von K_1 mit s (S) und t (T).
2. die Mittelsenkrechte zur Strecke ST konstruiert

Konstruktion: (**60°- Winkel**)
Man gebe einen Strahl s vor und bezeichne den Ursprung mit P. Man konstruiert nun einen Strahl t, ausgehend von P, mit $\angle (s,t) = 60°$, indem man…

1. einen Kreis K_1 mit bel. Radius r_1 um P zieht. Man erhält einen Schnittpunkt von K_1 mit s (S).
2. um S einen Kreis K_2 mit Radius $r_2 = r_1$ zieht.
3. von P einen Strahl t durch $Q \in (K_1 \cap K_2)$ konstruiert.

Bemerkung:
Man hat hier die Eigenschaft von gleichseitigen Dreiecken ausgenutzt, in welchen alle Innenwinkelgrößen 60° betragen.
Nun kann man Winkel der Größe 15°, 30°, 45°, 60°, 75°, … konstruieren (natürlich sind hier auch kleinere Schritte möglich).

1.5. *Konstruktion von Punkt- und Achsenspiegelungen*

Die genaue Definition einer Punkt- oder Achsenspiegelung wird uns im weiteren Verlauf noch begegnen. Deshalb sei hier auf die Definition zu verzichten.

Konstruktion: (**Punktspiegelung**)
Man führt eine Punktspiegelung in einem Punkt Z durch, indem man Geraden durch die abzubildenden Punkte P_i und dem Spiegelzentrum Z zieht und die zugehörigen Längen $|ZP_i|$ mit dem Zirkel überträgt.

Konstruktion: (**Achsenspiegelung**)
Man konstruiert das Bild einer Figur unter einer Spiegelung an einer Gerade g, indem man durch die Eckpunkte P_i der Figur Senkrechten auf g konstruiert und die Längen $|L_{P_i}P_i|$ mit dem Zirkel überträgt.

Vergleich:
Bei einer Punktspiegelung haben die Bildpunkte unter Spiegelung den gleichen Abstand zum Spiegelzentrum wie deren Urbilder. Bei einer Achsenspiegelung haben die Bildpunkte unter Spiegelung den gleichen Abstand zur Spiegelachse wie deren Urbilder.
Außerdem sind Achsenspiegelungen im Gegensatz zu Punktspiegelungen *„Orientierungsumkehrend“*. Dies kann man sich mit Hilfe eines Spiegels verdeutlichen.

2. Isometrien und Bewegungen in der Ebene

Definition: (**Isometrie**)
Eine bijektive Abbildung $\phi: \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ der Ebene in sich heißt Isometrie, falls sie abstandserhaltend ist, also:

$$|\phi(A)\phi(B)| = |AB| \text{ für alle } A, B \in \mathbb{E}$$

Definition: (**Bewegung**)
Eine bijektive Abbildung $\phi: \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ bij. der Ebene in sich heißt Bewegung, falls sie abstandserhaltend UND winkelerhaltend ist, also:

$$|\phi(A)\phi(B)| = |AB| \text{ für alle } A, B \in \mathbb{E}$$

$$\sphericalangle\big(\phi(s)\phi(t)\big) = \sphericalangle(\mathrm{s}, \mathrm{t}) \text{ für alle Strahlen } s, t \subset \mathbb{E}$$

(M.a.W.: Bewegungen sind winkelerhaltende Isometrien)

Bemerkung:
Folglich ist jede Bewegung eine Isometrie, aber nicht jede Isometrie eine Bewegung.
Bsp.: Spiegelungen kehren Orientierungen um und sind deshalb nicht winkelerhaltende Isometrien (also keine Bewegung).

Notation:
$\mathcal{B}$ heißt Menge der Bewegungen.

Bemerkung:
$\mathcal{B}$ erfüllt folgende Eigenschaften:

(i) $\mathrm{id}_{\mathbb{E}} \in \mathfrak{B}$
(ii) $\phi, \psi \in \mathfrak{B} \Longrightarrow \phi \circ \psi \in \mathfrak{B}$
(iii) $\phi \in \mathfrak{B} \Longrightarrow \phi^{-1} \in \mathfrak{B}$

2.1. *Drehungen*

Bevor wir uns die Drehung als Beispiel einer Bewegung anschauen werden, erinnern wir uns noch einmal an die Notation des Drehwinkels:

Notation: (**Drehwinkel**)
Es seien A,B,C drei Punkte. Weiter sei t der Strahl mit Anfang B in Richtung A und es sei s der Strahl mit Anfang B in Richtung C. Dann schreiben wir:

$$\begin{aligned} \sphericalangle \mathrm{ABC} &= \sphericalangle(\mathrm{s}, \mathrm{t}) \\ &= \sphericalangle(\overrightarrow{\mathrm{BC}}, \overrightarrow{\mathrm{BA}}) \end{aligned}$$

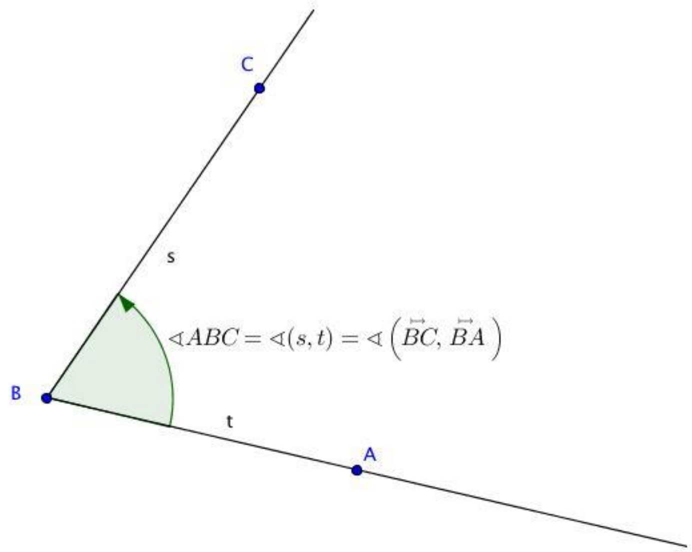

Abb. 1: Drehwinkelnotation. Quelle: Skript Elementare Geometrie SoSe 15 – Bauer (Universität Bielefeld)

Lemma: (**‚Rechenregeln' für Drehwinkel**)

(i) Sei T eine Translation so gilt: $\sphericalangle\big(\mathrm{T}(\mathrm{s}), \mathrm{T}(\mathrm{t})\big) = \sphericalangle(\mathrm{s}, \mathrm{t})$

(ii) Für drei Strahlen r,s,t gilt: $\sphericalangle(r,s) + \sphericalangle(s,t) = \sphericalangle(r,t)$

Definition: (**Drehwinkel einer Bewegung**)
Sei $\phi \in \mathfrak{B}$ so definiere den Drehwinkel der Bewegung ϕ:

$$\vartheta(\phi) = \sphericalangle(\phi(\mathrm{s}), \mathrm{s})$$

(wobei s ein Strahl)

Proposition: (**Additivität von Drehwinkeln**)
Seien $\phi, \psi \in \mathfrak{B}$ so gilt

$$\vartheta(\phi \circ \psi) = \vartheta(\phi) + \vartheta(\psi)$$

Nun kommen wir zur Definition der Drehung:

Definition: (**Drehung**)
Es seien s und t zwei Strahlen, die vom gleichen Punkt Z ausgehen. Die Bewegung D, welche den Strahl t in den Strahl s überführt, nennen wir Drehung um den Punkt Z.

Spezialfall: (**Punktspiegelung**)
Für eine Drehung D um den Punkt Z mit Winkel 180° erhalten wir:

$$\mathrm{D}(\mathrm{s}) = -\mathrm{s}$$

Eine solche Drehung nennen wir *Punktspiegelung*.
Weiter gilt offensichtlich für Punktspiegelungen D:

$$\mathrm{D}^2 := \mathrm{D} \circ \mathrm{D} = \mathrm{id}_{\mathbb{E}}$$

Insbesondere gilt für alle Geraden g mit $\mathrm{Z} \in \mathrm{g}$:

$$\mathrm{D}(\mathrm{g}) = \mathrm{g}$$

2.2. *Translationen*

<u>Definition</u>: (**Translation**)
Gegeben seien zwei verschiedene Punkte P, Q und s sei der Strahl von P nach Q und t der Strahl von Q ausgehend mit $\mathrm{t} \subset \mathrm{s}$.
Die Bewegung T mit $\mathrm{T(s)} = \mathrm{t}$ nennen wir Translation, Verschiebung oder den Vektor von P nach Q und wir schreiben $\mathrm{T} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$.

<u>Bemerkung</u>:
Eine schöne Eigenschaft von Translationen ist, dass diese bezüglich der Verknüpfung (aufeinander folgende Ausführung) kommutieren. Es gilt also für zwei Translationen T_1 und T_2, dass $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$.
Die Begründung liegt in der Kommutativität der Addition von Vektoren:

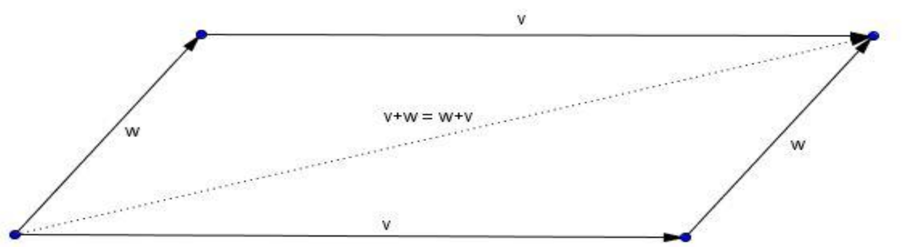

Abb. 2: Kommutativität der Vektoraddition; $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$

Das Kommutativgesetz für die Addition von Vektoren (Vertauschen der Summationsreihenfolge) fußt auf einer Eigenschaft von Parallelogrammen. Wie man der Abbildung 2 entnehmen kann, bilden die Vektoren $\vec{v}, \vec{w}$ ein Parallelogramm.

2.3. *Spiegelungen*

<u>Prinzip</u>: (**Spiegelungen**)
Sei g eine Gerade in der Ebene und H^+, H^- die durch g bestimmten Halbebenen. Die Spiegelung an g ist eine Isometrie $\mathrm{s_g}$ in der Ebende mit:

(i) $\mathrm{s_g(P)} = \mathrm{P}$, für alle $\mathrm{P} \in \mathrm{g}$

(ii) $\mathrm{s_g(H^+)} = \mathrm{H^-}$ und $\mathrm{s_g(H^-)} = \mathrm{H^+}$

(iii) $\mathrm{t_1, t_2}$ zwei Strahlen, dann $\sphericalangle\left(\mathrm{s_g(t_1), s_g(t_2)}\right) = -\sphericalangle(\mathrm{t_1, t_2})$

Außerdem gilt:

(iv) $|\mathrm{PQ}| = \left|\mathrm{s_g(P) s_g(Q)}\right|$

(v) $\mathrm{s_g^2} := \mathrm{s_g} \circ \mathrm{s_g} = \mathrm{id}_{\mathbb{E}}$

In (iii) wird klar, warum Spiegelungen keine Bewegungen sind.

Des Weiteren kann man sich an einer Skizze veranschaulichen, dass die Spiegelung an einer Geraden nicht durch eine Bewegung (Kompositionen von Drehungen oder Translationen …) rückgängig gemacht werden kann.

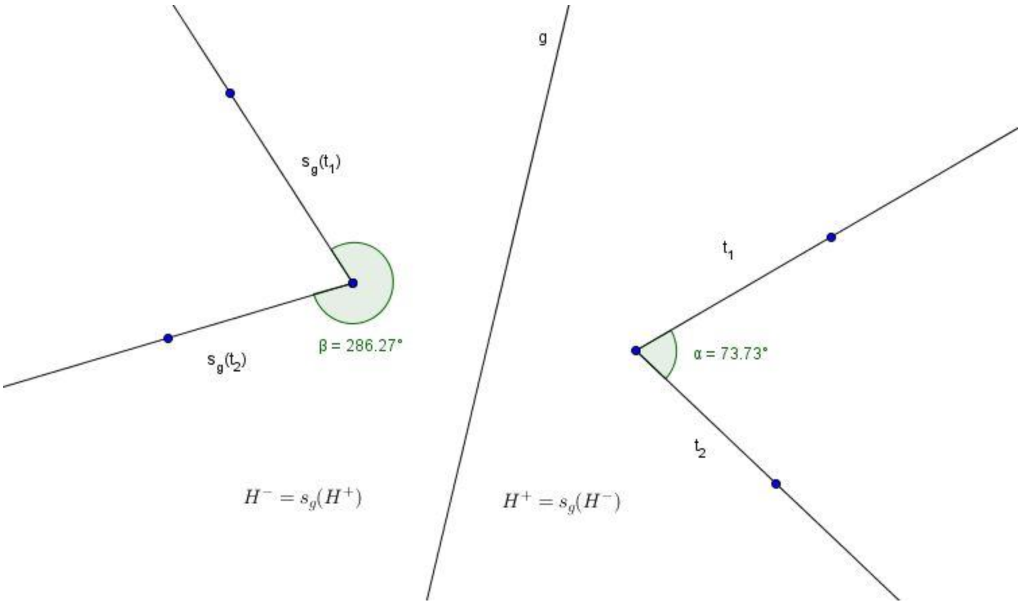

Abb. 3: Achsenspiegelung der Strahlen t_1, t_2 an der Geraden g. $\alpha = \sphericalangle(t_1, t_2)$ und $\beta = \sphericalangle\left(s_g(t_1), s_g(t_2)\right)$.

Es fällt sofort auf, dass die Spiegelung an der s_g Geraden g den Winkel nicht erhält, da gilt:

$$\sphericalangle(t_1, t_2) \neq \sphericalangle\left(s_g(t_1), s_g(t_2)\right)$$

<u>Satz</u>: (**Kompositionen von Spiegelungen**)

Seien im Folgenden g, h Geraden und s_g, s_h die Spiegelung an g bzw. h.

1. Fall: Die Geraden g, h schneiden sich

Seien g^+,h^+ Strahlen auf g bzw. h mit Anfangspunkt P. $\alpha := \sphericalangle(g^+, h^+)$

Es gilt:

$$s_g \circ s_h = D(P, 2\alpha) = D(P, \alpha + 180°) = D(P, \alpha)^2$$

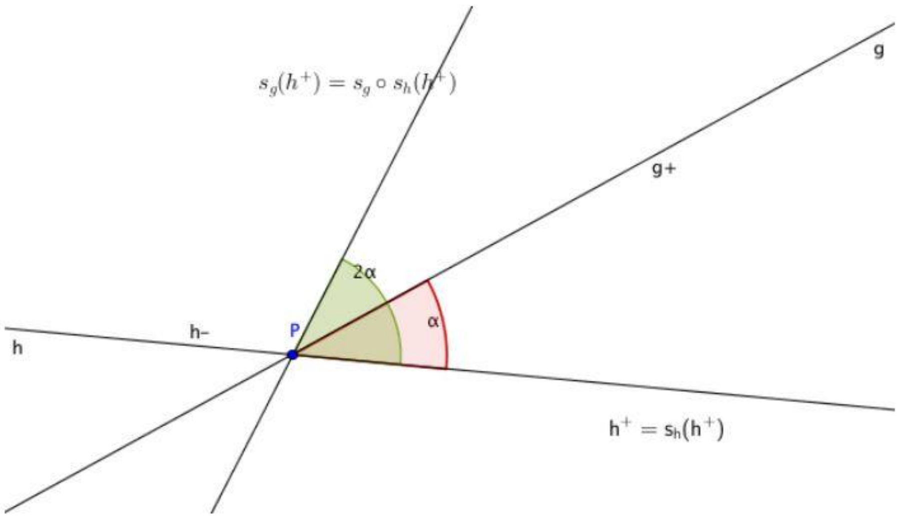

Abb. 4: Komposition zweier Achsenspiegelungen, dessen Spiegelachsen sich in einem Punkt schneiden.
Quelle: Skript Elementare Geometrie SoSe 15 – Bauer (Universität Bielefeld)

2. Fall: Die Geraden g, h sind parallel/identisch
Sei k eine Gerade und $k \perp h$ (also auch $k \perp g$) und G sei der Schnittpunkt von k und g sowie H der Schnittpunkt von k und h. $\mathrm{T} = \overrightarrow{\mathrm{GH}}$.
Es gilt:

$$\mathrm{s_h} \circ \mathrm{s_g} = \mathrm{T} \circ \mathrm{T} = 2 \cdot \mathrm{T}$$

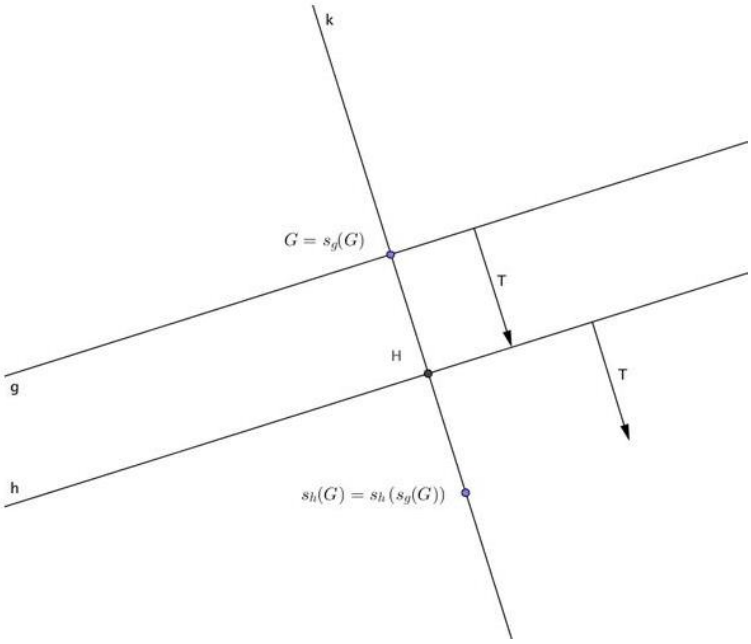

Abb. 5: Komposition zweier Achsenspiegelungen, dessen Spiegelachsen parallel sind.
Quelle: Skript Elementare Geometrie SoSe 15 – Bauer (Universität Bielefeld)

Aufgabe:
Gegeben seien drei Geraden g, h, k, welche sich in einem Punkt S schneiden. Man bestimme eine weitere Gerade l, sodass gilt:

$$s_g \circ s_h = s_k \circ s_l$$

<u>*Lösungsskizze*</u>:
Da die Komposition von zwei Achsenspiegelungen, welche sich in einem Punkt schneiden, eine Drehung um den Schnittpunkt dieser Geraden ist, hängt die Abbildung $s_g \circ s_h$ nicht von der Lage der Geraden ab, sondern nur vom Schnittpunkt und Winkel zwischen den Spiegelachsen. Es sei D die Drehung um den Punkt S, sodass $D(g) = k$:

$$s_g \circ s_h = s_{D(g)} \circ s_{D(h)} = s_k \circ s_{D(h)}$$

Die gesuchte Spiegelachse ist also $l = D(h)$.

Mit der Lösung dieser Aufgabe erhält man implizit eine Konstruktionsbeschreibung, mit welcher man diese Achse konstruieren kann (In der Aufgabenstellung ist jedoch nur verlangt eine solche Gerade zu bestimmen).

Als weitere Übung konstruiere man diese Gerade l.

2.4. *Gleitspiegelungen*

Definition: (**Gleitspiegelung**)
Wenn T eine Verschiebung entlang einer Geraden g ist ($g = T(g)$), so heißt die Verknüpfung $\tau = T \circ s_g$ Gleitspiegelung.

Abb. 6: Gleitspiegelung mehrfach auf einen Fußabdruck angewand.
Quelle: spreadshirtmedia.net

Bemerkung: (**Eigenschaften von Gleitspiegelungen**)
Offensichtlich gilt für alle Gleitspiegelungen, dass die Abbildung nicht von der Reihenfolge der Spiegelung und Translation abhängt.

Gleitspiegelungen haben ebenfalls keine Fixpunkte.

Die Spiegelachse ist jedoch invariant.

Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{P\tau(P)}$ liegt auf der Spiegelachse

Gleitspiegelungen und Drehwinkel
Betrachten wir nun die Gleitspiegelungen τ mit Gleitspiegelachse g und υ mit Gleitspiegelachse h. Da die Komposition zweier Gleitspiegelungen eine Bewegung ist, können wir den Drehwinkel dieser Komposition berechnen:

$$\begin{aligned}
\vartheta(\upsilon \circ \tau) &= \vartheta\left((T_h \circ s_h) \circ (T_g \circ s_g)\right) \\
&= \vartheta(T_h \circ s_g \circ s_h \circ T_g) \\
&= \underbrace{\vartheta(T_h)}_{=0} + \vartheta(s_g \circ s_h) + \underbrace{\vartheta(T_g)}_{=0} \\
&= \begin{cases} 2 \cdot \sphericalangle(g,h) & \text{, falls } g \cap h \neq \emptyset \\ 0 & \text{, falls } g \cap h = \emptyset \end{cases}
\end{aligned}$$

Fixpunkte und invariante Mengen

Unter einem Fixpunkt versteht man einen ausgezeichneten Punkt, der unter einer Isometrie unverändert bleibt. Das einfachste Beispiel ist das Zentrum einer Drehung, das durch die Drehung nicht bewegt wird. Dies gilt auch für die Spiegelungsgerade g einer Spiegelung s_g: für jeden Punkt $P \in g$ gilt $s_g(P) = P$. Eine etwas schwächere Forderung ist die Invarianz einer Menge. Eine Menge M wird als invariant unter einer Isometrie σ bezeichnet, falls gilt $\sigma(M) = M$. Dies heißt nicht, dass jeder Punkt durch σ auf sich selbst abgebildet wird, aber das Bild von M unter σ ist wieder M. Dies gilt beispielsweise für die Spiegelungsgerade einer Gleitspiegelung. Generell haben Translationen keinen Fixpunkt, aber es gibt hier invariante Mengen. Wie bereits erwähnt sind Fixpunkte von Drehungen die Drehzentren, invariante Mengen wären hier Kreise mit dem Drehzentrum als Mittelpunkt. Unter Spiegelungen invariante Mengen sind beispielsweise spiegelsymmetrische Objekte, deren Symmetrieachse auf der Spiegelgeraden liegt.

3. Dreiecke

<u>Bezeichnungen</u>: (**Dreiecke und Winkel**)
Sei ABC ein Dreieck, also A,B,C drei verschiedene Punkte in der Ebene (Liegen diese auf einer Gerade, so nennen wir ABC ausgeartet).
Bezeichne:

$$\sphericalangle(ABC) = \sphericalangle\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right)$$

$$\angle ABC = \begin{cases} \sphericalangle(ABC) & 0 \leq \sphericalangle(ABC) \leq 180° \\ 360° - \sphericalangle(ABC) & 180° \leq \sphericalangle(ABC) \leq 360° \end{cases}$$

3.1. Winkelsumme

<u>Satz</u>: (**Winkelsummensatz Dreieck**)
Sei ABC ein (nicht ausgeartetes) Dreieck, so gilt:

$$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180°$$

Aufgabe:
Gegeben sei ein (nicht ausgeartetes) Dreieck ABC und der Inkreismittelpunkt I. Man zeige, dass gilt:

$$\angle BIA = 90° + \frac{1}{2} \cdot \angle BCA$$

<u>Lösungsskizze</u>:

1. $\frac{1}{2} \cdot \angle ABC + \frac{1}{2} \cdot \angle BCA + \frac{1}{2} \cdot \angle CAB = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$
2. $\angle ABC + \angle CAB + \angle BIA = 180°$

Man erhält durch Einsetzen der Gleichung 1 in 2 (nachdem man sie umgeformt hat) die Behauptung. Diese Rechnung sei dem Leser überlassen.

q.e.d.

<u>Bemerkung/ Satz:</u> (**Winkelsummensatz n- Ecke**)
Sei $P_1P_2 \dots P_n$, $n \geq 3$ ein n- Eck und α_i , $1 \leq i \leq n$ die zugehörigen Innenwinkel des n-Ecks $P_1P_2 \dots P_n$, so gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 180° + (n-3) \cdot 180°$$

Hier merke man sich am besten, dass pro Ecke die Winkelsumme um 180° erhöht wird. Andersherum muss man jedoch vorsichtig sein, da wir n- Ecke mit mindestens drei Ecken betrachten.

3.2. Kongruenzen

<u>Definition</u>: (**Kongruenz von Dreiecken**)
Zwei Dreiecke ABC und A'B'C' heißen Kongruent, falls es eine Isometrie σ gibt mit:

$$\sigma(A) = A'$$
$$\sigma(B) = B'$$
$$\sigma(C) = C'$$

Zwei Dreiecke ABC und A'B'C' sind kongruent, wenn

1. <u>Satz</u>: (**Kongruenzsatz SSS**)
   |AB| = |A'B'|, |AC| = |A'C'| und |BC| = |B'C'|

2. <u>Satz</u>: (**Kongruenzsatz SWS**)
   |AB| = |A'B'|, |BC| = |B'C'| und ∠(ABC) = ∠(A'B'C')

3. <u>Satz</u>: (**Kongruenzsatz WSW**)
   |AB| = |A'B'|, ∠(CAB) = ∠(C'A'B') und ∠(CBA) = ∠(C'B'A')

Nun kann man sich die Frage stellen, ob es einen Kongruenzsatz der Form WWW geben kann. Die Antwort erhält man mit folgendem Beispiel:
Sei ABC ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge a und DEF ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge b. Die Innenwinkel der Dreiecke stimmen alle überein – sie betragen 60°. Somit wären sie kongruent, sofern es einen WWW- Satz geben würde.
ABER: Es gibt keine Isometrie σ, sodass die Eckpunkte aufeinander abgebildet werden, da die Abstände der Eckpunkte verändert werden. Es gilt nicht:

$$|AB| = |\sigma(A)\sigma(B)|$$

Schließlich gilt ebenfalls: Zwei kongruente Dreiecke sind ähnlich, aber zwei ähnliche Dreiecke sind im Allgemeinen nicht kongruent.

3.3. Besondere Punkte im Dreieck

Sei ABC ein Dreieck. Wir bezeichnen:

- Umkreismittelpunkt = Schnittpunkt der Mittelsenkrechten
  Dieser Punkt hat von den Eckpunkten den gleichen Abstand

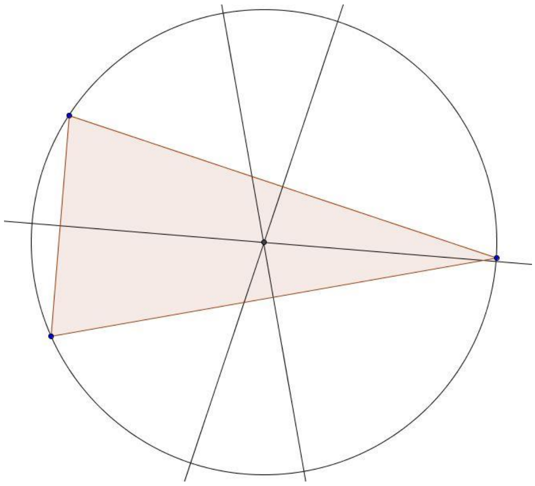

Abb. 7: Außenkreis eines Dreiecks

- Innenkreismittelpunkt = Schnittpunkt der Winkelhalbierenden
  Dieser Punkt hat von den Seiten den gleichen Abstand

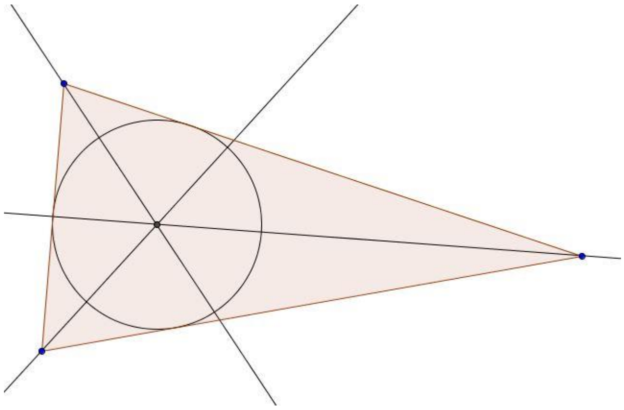

Abb. 8: Innenkreis eines Dreiecks

- Schwerpunkt = Schnittpunkt der Seitenhalbierenden
  Die Seitenhalbierenden teilen sich im Verhältnis 2:1

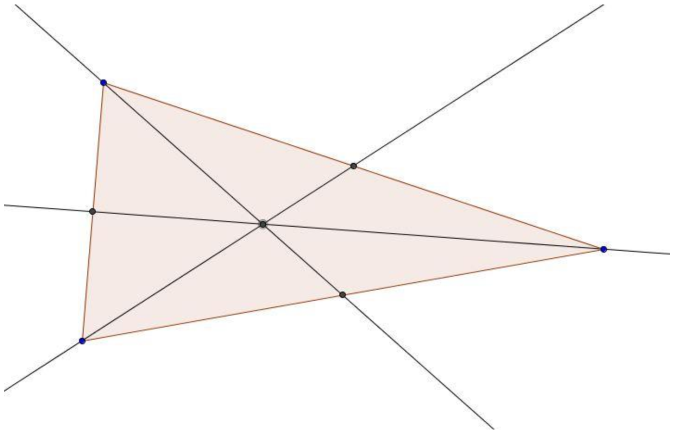

Abb. 9: Schwerpunkt eines Dreiecks

- Höhenschnittpunkt = Schnittpunkt der Höhen

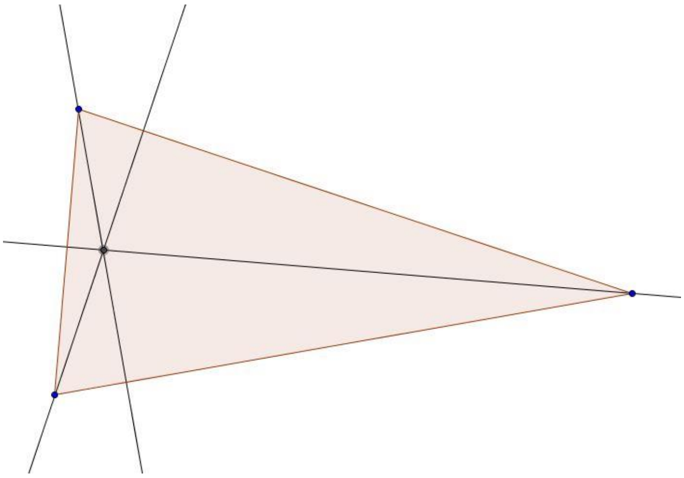

Abb. 10: Höhenschnittpunkt eines Dreiecks

<u>*Nice to know*</u>*:*
Als kleinen Exkurs ist in der folgenden Abbildung (11) die sogenannte Eulergerade abgebildet. Diese Gerade geht durch den Schnittpunkt der Höhen, Seitenhalbierenden und Mittelsenkrechten. Für Interessierte: es lohnt sich einmal den Wikipedia- Artikel hierzu durch zu lesen.

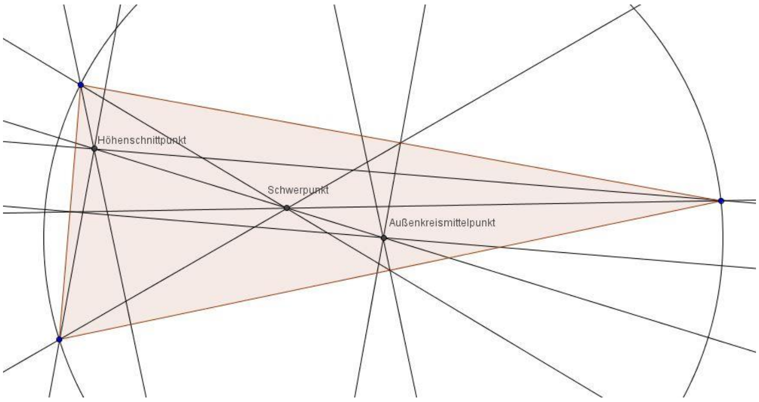

Abb. 11: Eulergerade

4. Sehnentangentenwinkelsatz

Definition: (**Umfangs-, Mittelpunkts-, und Sehnentangentenwinkel**)

Gegeben sei ein Kreis $\mathcal{K} \subset \mathbb{E}$ mit Mittelpunkt M. Zwei verschiedene Punkte $A, B \in \mathcal{K}$ begrenzen einen Kreisbogen. Sei $P \in \mathcal{K}$ ein beliebiger Punkt auf dem von A, B begrenzten Kreisbogen.

$\angle APB$ heißt *Umfangswinkel* (oder auch *Peripheriewinkel*)

$\angle AMB$ heißt *Mittelpunktswinkel* (oder auch *Zentriwinkel*)

Der Winkel zwischen der Sehne $\overline{AB}$ und der Tangente durch A oder B heißt *Sehnentangentenwinkel.*

Skizze:

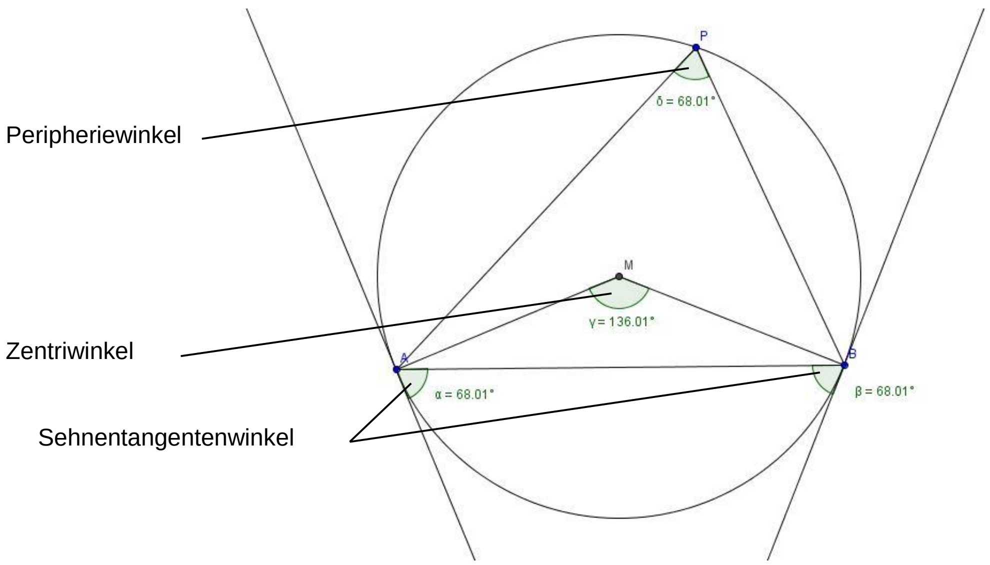

Abb. 12: Sehnentangenten-, Zentri- und Peripheriewinkel

Satz: (**Sehnentangentenwinkelsatz**)
Die beiden Sehnentangentenwinkel eines Kreises sind so groß wie die zugehörigen Peripheriewinkel und halb so groß wie der Zentriwinkel.

Aufgabe:
Vorgegeben seien die Punkte A und B und ein Winkel α. Bestimmen Sie alle Punkte C, sodass gilt: $\angle ACB = \alpha$

<u>Lösungsskizze</u>: *Sehnentangentenwinkelsatz*

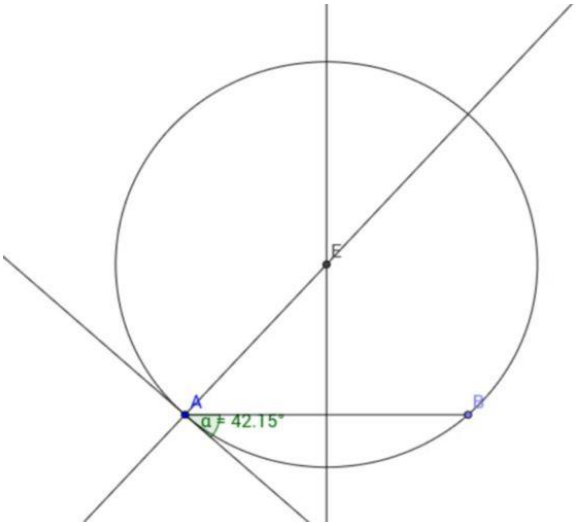

Abb. 13: Anwendung des Sehnentangentenwinkelsatzes

1.) *Übertrage den Winkel α an die Strecke $\overline{AB}$ in den Punkt A (konstruiere eine Gerade)*
2.) *Ziehe ein Lot durch den Punkt A auf der in 1 konstruierten Gerade.*
3.) *Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten und des Lotes aus 2. ergeben den Außenkreismittelpunkt. Somit liegen alle möglichen Punkte C des gesuchten Dreiecks auf dem von A und B begrenzten und an $\overline{AB}$ gespiegeltem Kreisbogen.*

5. Strahlensätze

<u>Definition</u>: (**affine Abbildungen**)
Eine bijektive Abbildung $f: g \to g'$ zweier Geraden g,g‘ heißt affin, wenn für beliebige verschiedene Punkte A,B,C der Geraden gilt:

$$\frac{\overrightarrow{f(C)f(A)}}{\overrightarrow{f(C)f(B)}} = \frac{|\overrightarrow{CA}|}{|\overrightarrow{CB}|} \quad \circledast$$

<u>Lemma</u>: (Verknüpfung von zwei affinen Abbildungen)
Seien p, q zwei affine Abbildungen mit $p: g \to g'$ und $q: g' \to g''$ (wir schreiben auch $g \overset{p}{\to} g' \overset{q}{\to} g''$), so ist die Verknüpfung $(q \circ p): g \to g''$ wieder eine affine Abbildung.

Im Falle dieses Lemmas führen wir einmal den Beweis, welcher nicht schwer ist. Man nutzt hier lediglich nur eine Eigenschaft ($\circledast$) von affinen Abbildungen:

Beweis:

$$\frac{\overrightarrow{(q \circ p)(C)(q \circ p)(A)}}{\overrightarrow{(q \circ p)(C)(q \circ p)(B)}} = \frac{\overrightarrow{q\big(p(C)\big)q\big(p(A)\big)}}{\overrightarrow{q\big(p(C)\big)q\big(p(B)\big)}} = \frac{\overrightarrow{p(C)p(A)}}{\overrightarrow{p(C)p(B)}} = \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}}$$

In der ersten Gleichheit benutzen wir die Definition der Verknüpfung von Abbildungen. Für die zweite und dritte Gleichung benutzen wir jeweils, dass p und q affine Abbildungen sind.

q.e.d.

<u>Satz</u>: (**Strahlensätze aus der Schule**)
Seien $s_1, s_2 \in \mathbb{E}$ zwei Strahlen mit Ursprung Z und $p_1, p_2 \in \mathbb{E}$ zwei parallele Geraden mit $p_1 \cap s_1 = A,\ p_1 \cap s_2 = B,\ p_2 \cap s_1 = A'$ und $p_2 \cap s_2 = B'$, so gelten folgende Aussagen:

$\frac{|ZA'|}{|ZA|} = \frac{|ZB'|}{|ZB|}$ 1. Strahlensatz („Schenkellösung)

$\frac{|AA'|}{|ZA|} = \frac{|BB'|}{|ZB'|}$ 1. Strahlensatz („Abschnittslösung“)

$\frac{|ZA'|}{|A'B'|} = \frac{|ZA|}{|AB|} \Leftrightarrow \frac{|ZA'|}{|ZA|} = \frac{|A'B'|}{|AB|}$ 2. Strahlensatz („Schenkellösung“)

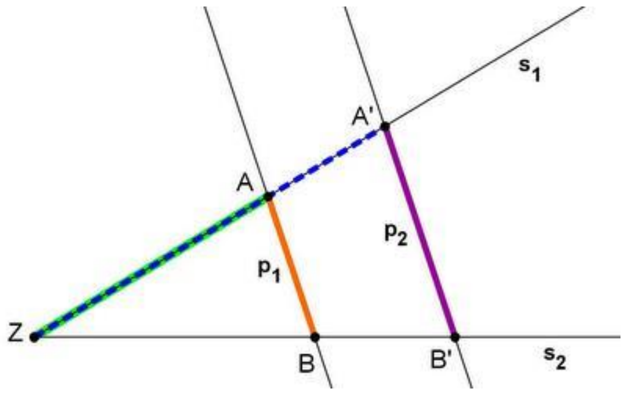

Abb. 14: Strahlensätze aus der Schule. p_1 und p_2 bezeichnen hier die parallelen Geraden (!). Quelle: http://wikis.zum.de

Satz: (**Erster Strahlensatz**)
Es seien $g, g‘$ und h Geraden in der Ebene. Wir nehmen an, die Gerade h sei weder zu g noch zu $g‘$ parallel.
Die Parallelprojektion zu h ist eine affine Abbildung.

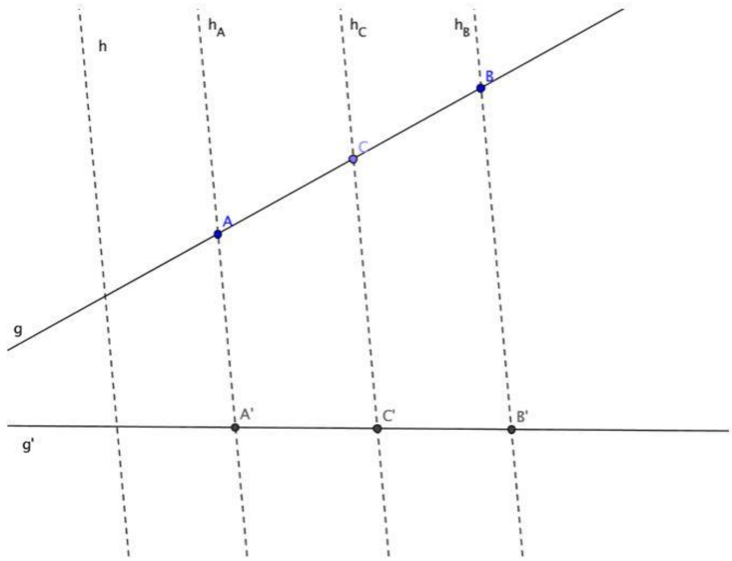

Abb. 15: erster Strahlensatz. Quelle: Skript Elementare Geometrie SoSe 15 – Bauer (Universität Bielefeld)

Mithilfe der Definition affiner Abbildungen kann man hier den 1. Strahlensatz aus der Schule in Schenkellösung und Abschnittslösung folgern, wobei man den Schnittpunkt von g und g' mit Z bezeichne.
Jedoch gibt einem diese Formulierung mehr! Sei D ein weiterer Punkt auf g mit $D \notin \overline{AB}$ und D' der Bildpunkt von D unter der gegebenen Parallelprojektion. So gilt:

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BD}} = \frac{\overrightarrow{A'C'}}{\overrightarrow{B'D'}}$$

An dieser Stelle sieht man, dass es wichtig ist auch solche Formulierungen zu verstehen und zu kennen. In der Schule kann gut eine Frage einer Schülerin oder eines Schülers kommen, ob auch die Verhältnisse von nicht aneinanderhängenden Strecken auf den Schenkeln einer Strahlensatzfigur ebenfalls in einem solchen Verhältnis stehen. Der erste Strahlensatz gibt hierfür die Antwort.

Satz: (**Zweiter Strahlensatz**)
Es seien g und g‘ zwei nicht parallele Geraden. Es sei $p: g \to g'$ eine Parallelprojektion entlang der Geraden h. Es seien A,B,C,D vier paarweise verschiedene Punkte auf g. Wir setzen:
$p(A) = A',\ p(B) = B',\ p(C) = C',\ p(D) = D',\ T_A = \overrightarrow{AA'},\ T_B = \overrightarrow{BB'},\ T_C = \overrightarrow{CC'}$ und $T_D = \overrightarrow{DD'}$. Dann gilt:

$$\frac{T_A - T_B}{T_C - T_D} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}}$$

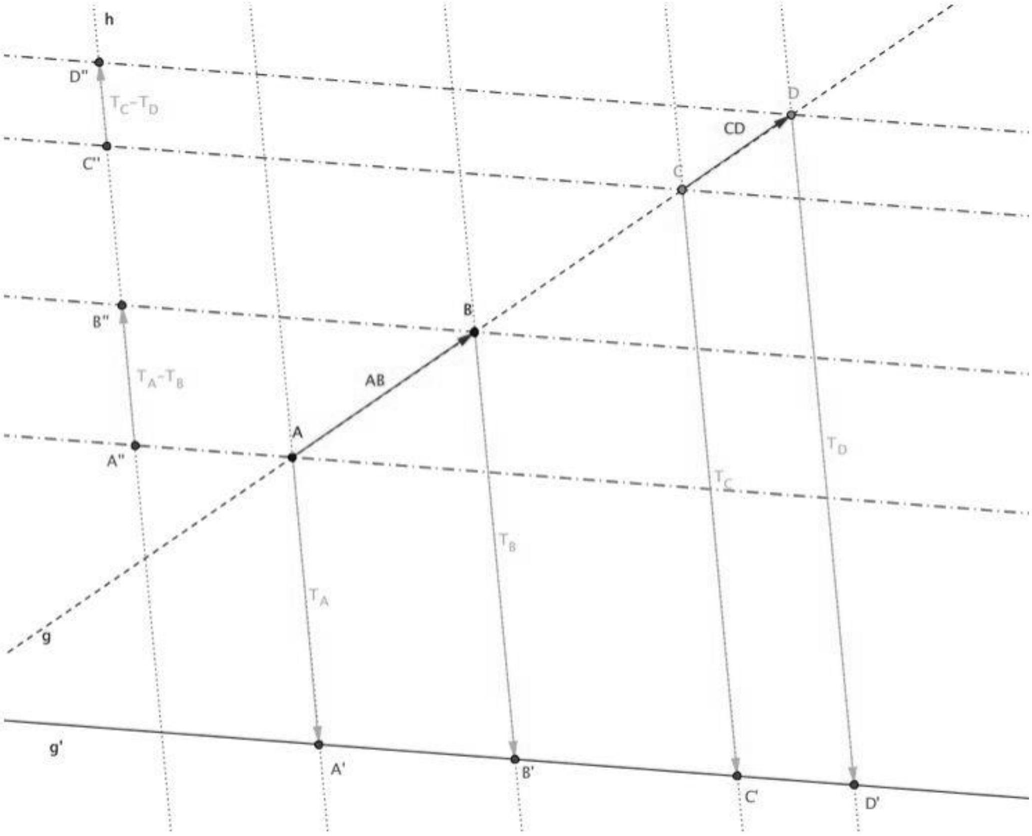

Abb. 16: zweiter Strahlensatz. Quelle: Skript Elementare Geometrie SoSe 15 – Bauer (Universität Bielefeld)

Setzt man in dem Fall des zweiten Strahlensatzes den Schnittpunkt der Geraden g und g' als Punkt A und $C = A$, so erhält man die Version 2. Strahlensatz, welchen man aus der Schule kennt.

Satz: (**Dritter Strahlensatz**)
Es seien g und g' parallele Geraden und Z ein Punkt, der zu keiner der Geraden gehört. Dann ist die Zentralprojektion $p: g \rightarrow g'$ mit Zentrum Z affin.

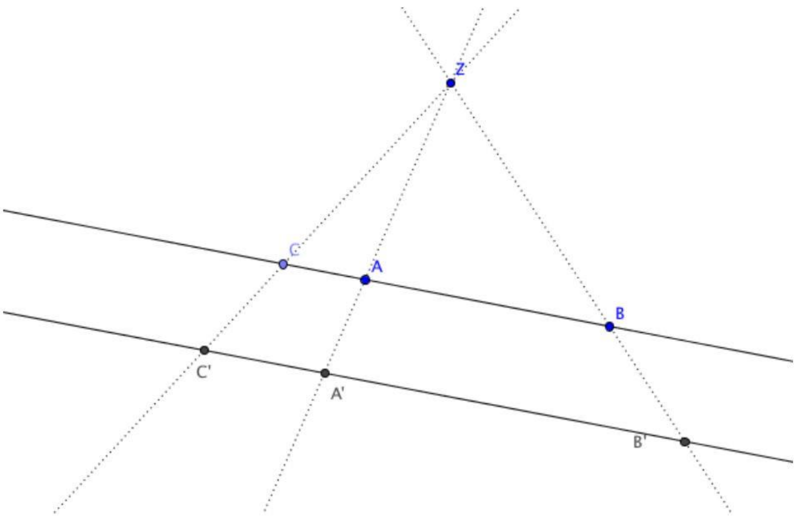

Abb. 17: dritter Strahlensatz. Quelle: Skript Elementare Geometrie SoSe 15 – Bauer (Universität Bielefeld)

Dieser Strahlensatz ist aus der Schule nicht bekannt, jedoch sehr nützlich und vorbereitend auf die gymnasiale Oberstrufe. In der Vektorrechnung kann einem dieser Satz durchaus weiterhelfen.

Zur Erläuterung stelle man sich hier einen Overhead- Projektor (OHP) vor (wobei wir die Linse und den Spiegel ignorieren). Die Lampe entspreche dem Punkt Z in Abbildung 17 die Punkte A,B und C beschreiben hierbei Punkte auf einer Folie, die man auf den Projektor legt. A‘,B‘ und C‘ sind dann die projizierten Punkte an der Wand. Dieser Satz garantiert einem also, dass man guten Gewissens beispielsweise Zeichnungen zu den Strahlensätzen mit einem OHP präsentieren kann.

Außerdem beachte man den Unterschied in den Formulierungen der Strahlensätze aus dem Skript und wie man sie aus der Schule kennt:

In der Schule betrachtet man nur die Längen der Teilstrecken einer Strahlensatzfigur. Die Sätze aus dem Skript geben uns jedoch mehr als das die Längen im Verhältnis gleich sind, diese sind in der Orientierung ebenfalls gleich.

6. Satz von Menelaos und Ceva

Satz: (**Satz von Menelaos**)
Es sei ABC ein Dreieck. Es seien $A' \in BC, B' \in AC, C' \in AB$ wobei keiner der Punkte A', B', C' ein Eckpunkt der jeweiligen Strecken ist. Dann liegen die drei Punkte genau dann auf einer Geraden wenn das folgende Produkt von Teilverhältnissen gleich 1 ist:

$$\frac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}} \cdot \frac{\overrightarrow{B'C}}{\overrightarrow{B'A}} \cdot \frac{\overrightarrow{C'A}}{\overrightarrow{C'B}} = 1$$

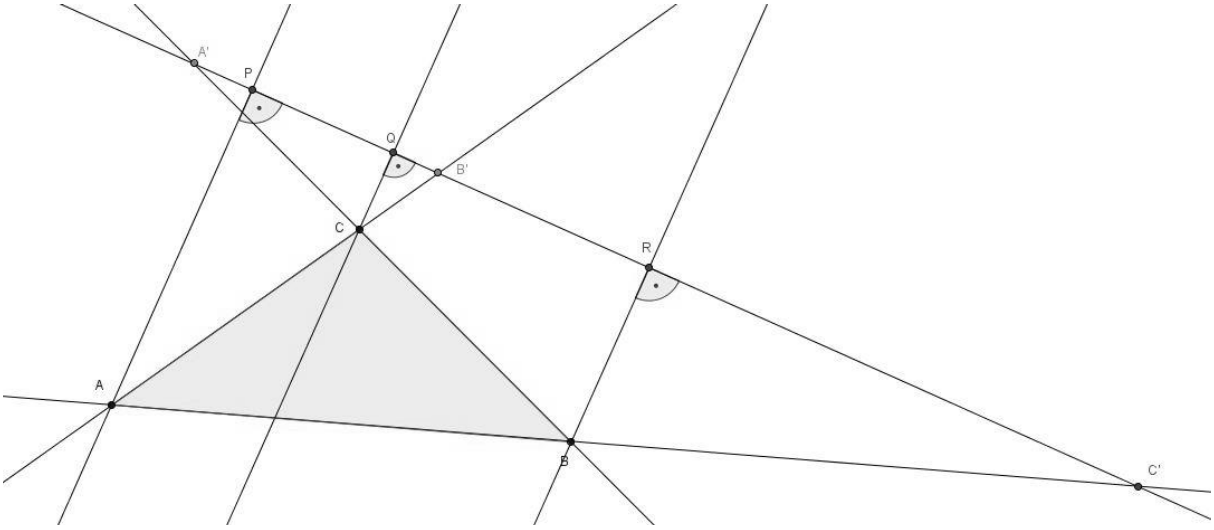

Abb. 18: Satz von Menelaus

Geometrischer Hintergrund/Beweisidee:
Man fällt auf die Gerade durch die Punkte A',B' und C' die Lote der Eckpunkte A,B,C.
Nun erhält man Strahlensatzfiguren mit Zentrum in den Punkten A',B' und C'. Man erhält folgende Verhältnisse:

I $\quad \frac{\overrightarrow{C'A}}{\overrightarrow{C'B}} = \frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{BR}}$

II $\quad \frac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}} = \frac{\overrightarrow{BR}}{\overrightarrow{CQ}}$

III $\quad \frac{\overrightarrow{B'C}}{\overrightarrow{B'A}} = \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{AP}}$

Nun erhält man:

$$\frac{\overrightarrow{C'A}}{\overrightarrow{C'B}} \cdot \frac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}} \cdot \frac{\overrightarrow{B'C}}{\overrightarrow{B'A}} = \frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{BR}} \cdot \frac{\overrightarrow{BR}}{\overrightarrow{CQ}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{AP}} = 1$$

Hiermit ist der Satz jedoch nicht bewiesen. Hier verweisen wir auf den Beweis im Skript von Herrn Bauer.

<u>Satz</u>: (**Satz von Ceva**)
Es sei ABC ein Dreieck. Es seien $A' \in BC, B' \in AC, C' \in AB$ wobei keiner der Punkte A', B', C' ein Eckpunkt der jeweiligen Strecken ist. Die drei Geraden AA', BB', CC' schneiden sich genau dann in einem Punkt oder sind parallel, wenn gilt:

$$\frac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}} \cdot \frac{\overrightarrow{B'C}}{\overrightarrow{B'A}} \cdot \frac{\overrightarrow{C'A}}{\overrightarrow{C'B}} = -1$$

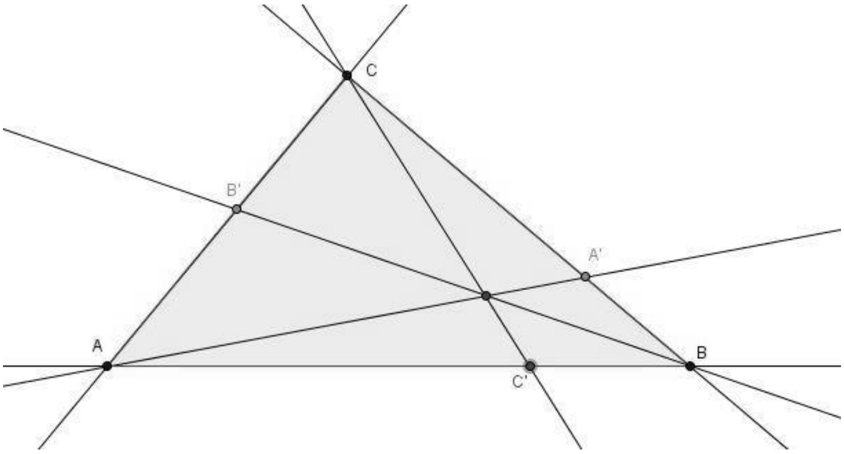

Abb. 18: Satz von Menelaus

<u>Bemerkung</u>:
Der obige Quotient $\frac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}} \cdot \frac{\overrightarrow{B'C}}{\overrightarrow{B'A}} \cdot \frac{\overrightarrow{C'A}}{\overrightarrow{C'B}}$ wird auch Ceva- Menelaos- Quotient genannt.

Auch wenn die Sätze von Menelaos und Ceva ähnlich erscheinen, so sind sie doch in ihrer Aussage verschieden. Hier hilft eine Skizze für das tiefere Verständnis!

- In dem Satz von Menelaos wird die Lage von Punkten auf den verlängerten Seiten eines Dreiecks beschrieben. Diese liegen auf einer Geraden, genau dann wenn der Ceva-Menelaos- Quotient gleich 1 ist.
- Im Satz von Ceva geht es jedoch um die Lagebeziehung von Transversalen eines Dreiecks. Diese schneiden sich oder sind parallel, genau dann wenn der Ceva-Menelaos- Quotient gleich -1 ist.