Prof. Dr. Etienne Emmrich
Universität Bielefeld

Sommersemester 2010

Nichtlineare Funktionalanalysis und Differentialgleichungen

3. Übungsblatt

Abgabe in der Übung am 20. Mai 2010

Aufgabe 1: **3 Punkte**

(a) Wir betrachten das Problem

$$\begin{cases} -(a(x)u'(x))' &= 0, \quad x \in (-1,1), \\ u(-1) &= 3, \\ u(1) &= 0, \end{cases}$$

wobei

$$a(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in (-1,0), \\ 1/2, & \text{falls } x \in (0,1). \end{cases}$$

Stelle die schwache Formulierung auf, untersuche das Problem auf Lösbarkeit und bestimme eine Lösung[1].

(b) Stelle die schwache Formulierung des Problems

$$\begin{cases} -u'' + cu' + du &= f \quad \text{in } (a,b), \\ u'(a) + c_a u(a) &= \alpha, \\ u'(b) + c_b u(b) &= \beta \end{cases}$$

auf, wobei $c, d \in L^\infty(a,b)$ seien, $f \in L^2(a,b)$ und $c_a, c_b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Kann man die Voraussetzung an f abschwächen?

Aufgabe 2: **2 Punkte**

Seien $c, d \in L^\infty(a,b)$. Zeige, daß ein μ_0 existiert, so daß für alle $\mu > \mu_0$ die schwache Formulierung des Problems

$$\begin{cases} -u'' + cu' + du + \mu u = f \quad \text{auf } (a,b), \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

für alle $f \in H^{-1}(a,b)$ eindeutig in $H_0^1(a,b)$ lösbar ist.

[1] Hierzu ist es günstig, einmal mit Funktionen zu testen, die in $(-1,0)$ verschwinden, und ein anderes Mal mit Funktionen, die in $(0,1)$ verschwinden.

Aufgabe 3: **3 Punkte**

Wir betrachten das Problem mit Neumann-Randdaten

$$\begin{cases} -(p(x)u'(x))' = f(x), & x \in (a,b), \\ p(a)u'(a) = p(b)u'(b) = 0 \end{cases}$$

mit $0 < \alpha \leq p(x) \leq \beta$, $x \in (a,b)$. Unter welchen Voraussetzungen hat das Problem genau eine Lösung? Wie ist es, wenn zusätzlich $f \in L^2(a,b)$ gefordert wird?
Hinweis: Betrachte den Raum $V := \{v \in H^1(a,b) \,|\, \overline{v} := (b-a)^{-1} \int_a^b v(\xi)d\xi = 0\}$.

Aufgabe 4: **3 Punkte**

Sei V ein reeller, reflexiver Banachraum. Zeige, daß das Energiefunktional $J : V \to \mathbb{R}$,

$$J(v) := \frac{1}{2}a(v,v) - \langle f, v\rangle, \quad v \in V,$$

(streng) konvex ist, wenn a (stark) positiv ist. Zeige weiterhin, daß für die Gâteaux-Ableitung $J'(u)$ an der Stelle u

$$\langle J'(u), v\rangle = a(u,v) - \langle f, v\rangle$$

gilt, wobei $\langle J'(u), v\rangle := \lim_{t\to 0} \frac{J(u+tv)-J(u)}{t}$ ist. Zeige schließlich noch, daß die Lösung des zugehörigen Variationsproblems J minimiert und es kein weiteres Element geben kann, das J minimiert.