

Nichtlineare Funktionalanalysis und Differentialgleichungen

6. Übungsblatt

Abgabe in der Übung am 17. Juni 2010

Aufgabe 1:

2 Punkte

Zeige: Sei $V = L^2(0, 1)$ und $g \in V$ fest. Dann ist

$$A : V \rightarrow V, \quad v \mapsto Av := g \|v\|^2,$$

zwar kompakt, aber nicht verstärkt stetig.

Aufgabe 2:

1 Punkt

Zeige, daß lineare, beschränkte Operatoren sowie Lipschitz-stetige Operatoren hemistetig sind.

Aufgabe 3:

2 Punkte

- (a) Sei X ein reflexiver Banachraum und $(x_n) \subset X$ eine beschränkte Folge. Nimm weiterhin an, daß alle schwach konvergenten Teilfolgen von (x_n) gegen dasselbe $x \in X$ konvergieren. Zeige, daß dann auch (x_n) schwach gegen x konvergiert.
- (b) Sei X ein separabler, normierter Raum und $(f_n) \subset X^*$ eine beschränkte Folge. Nimm weiterhin an, daß alle schwach* konvergenten Teilfolgen von (f_n) gegen dasselbe $f \in X^*$ konvergieren. Zeige, daß dann auch (f_n) schwach* gegen f konvergiert.

Aufgabe 4:

2 Punkte

Ein Banachraum heißt *strikt konvex*, falls aus $\|x\| \leq 1$ und $\|y\| \leq 1$ und $x \neq y$ folgt, daß $\|x+y\| < 2$. Ist nun X ein reflexiver Banachraum, dessen Dualraum strikt konvex ist, so gibt es zu jedem $x \in X$ genau ein Element $Jx \in X^*$, so daß

$$\langle Jx, x \rangle = \|x\|^2 = \|Jx\|_*^2.$$

Die Abbildung $J : X \rightarrow X^*$ heißt *Dualitätsabbildung*.

Zeige, daß die Dualitätsabbildung $J : X \rightarrow X^*$ demistetig, strikt monoton und koerzitiv ist. Ist X ein Hilbertraum, so folgt sogar starke Monotonie.

Der Beweis der Existenz der Dualitätsabbildung gibt 2 Extrapunkte.

Aufgabe 5:**3 Punkte**

Sei $B : V \rightarrow V^*$ beschränkt Lipschitz-stetig, es gebe also eine beschränkte Abbildung $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\|Bu - Bv\|_* \leq \beta(\max\{\|u\|, \|v\|\}) \|u - v\|.$$

Sei $R > 0$. Wir definieren

$$\tilde{B} : V \rightarrow V^*, \quad \tilde{B}v := \begin{cases} Bv, & \text{falls } \|v\| \leq R, \\ B\left(\frac{v}{\|v\|}R\right), & \text{falls } \|v\| > R. \end{cases}$$

Zeige, daß dann \tilde{B} Lipschitz-stetig ist.