

Nichtlineare Funktionalanalysis und Differentialgleichungen

8. Übungsblatt

Abgabe in der Übung am 8. Juli 2010

Aufgabe 1:

2 Punkte

Zeige die Stetigkeit des p -Laplace-Operators als Abbildung des Raumes $W_0^{1,p}(a, b)$ in seinen Dualraum für den Fall $1 < p < 2$.

Aufgabe 2:

2 Punkte

Verallgemeinere das Lemma von C ea auf die im Satz von Zarantonello auftretende Situation.

Aufgabe 3:

3 Punkte

In der Verarbeitung von Bildern, die durch bildgebende Verfahren der medizinischen Diagnostik (etwa CT, MRT oder PET) erzeugt werden (medical image processing), finden zunehmend partielle Differentialgleichungen Anwendung. Wie lauten diese, was beschreiben die auftretenden Variablen und wo findet man Näheres zur Modellierung, Analysis als auch Numerischen Analysis der Gleichungen?

Aufgabe 4:

1 Punkt

Wie lautet die Mathematics Subject Classification für das Gebiet der monotonen Operatoren?

Aufgabe 5:

2 Punkte

Beweise die Poincaré–Friedrichssche Ungleichung: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}$) ein Gebiet, welches in einer Richtung beschränkt ist. (Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, daß es ein $M > 0$ gibt mit $|x_1| \leq M$ für alle $x = (x_1, \dots, x_d) \in \Omega$.) Sei ferner $p \in [1, \infty)$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann gibt es zu jedem Multiindex β mit $|\beta| \leq k$ eine Konstante $c > 0$, so daß für alle $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$

$$\|D^\beta u\|_{0,p} \leq c |u|_{k,p}$$

gilt.