Prof. Dr. Etienne Emmrich
Universität Bielefeld

Sommersemester 2010

Nichtlineare Funktionalanalysis und Differentialgleichungen

9. Übungsblatt

Abgabe in der Übung am 15. Juli 2010

Aufgabe 1: **2 Punkte**

Vorgelegt sei die skalare Konvektions-Diffusions-Gleichung

$$-\operatorname{div}\left(a(x)\operatorname{grad} u(x)\right) + c(x) \cdot \operatorname{grad} u(x) + d(x)u(x) = f(x), \quad x \in \Omega,$$

wobei Ω eine beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$ sei. Für die Koeffizienten gelte

(a) Die matrixwertige Funktion $a \in L^\infty(\Omega)^{d\times d}$ sei symmetrisch und gleichmäßig positiv definit (gleichmäßig elliptisch), d. h., es gibt ein $\mu > 0$, so daß für alle $z \in \mathbb{R}^d$ und fast überall in $\Omega \ni x$ gilt $z^T a(x) z \geq \mu \|z\|^2_{\mathbb{R}^d}$.

(b) Die vektorwertige Funktion c sei aus $L^\infty(\Omega)^d$ und die skalarwertige Funktion d aus $L^\infty(\Omega)$.

Zeige, daß es zu jedem $f \in H^{-1}(\Omega)$ genau eine schwache Lösung gibt, sofern $c \in W^{1,\infty}(\Omega)^d$ und $d(x) - \frac{1}{2}\operatorname{div} c(x) \geq 0$ f. ü. in $\Omega \ni x$.

Aufgabe 2: **3 Punkte**

(i) Sei $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion mit kompaktem Träger. Zeige, daß

$$\|u\|_{0,4} \leq 2^{1/4} \|u\|^{1/2}_{0,2} \, |u|^{1/2}_{1,2}.$$

(ii) Sei $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion mit kompaktem Träger. Zeige, daß

$$\|u\|_{0,4} \leq \sqrt{2} \, \|u\|^{1/4}_{0,2} \, |u|^{3/4}_{1/2}.$$

(iii) Zeige, daß $H^1(\mathbb{R}^d)$ stetig eingebettet ist in $L^4(\mathbb{R}^d)$ für $d = 2, 3$.

Aufgabe 3: **3 Punkte**

Sei Ω die Einheitskreisscheibe und $\partial\Omega$ deren Rand. Dann ist für jede Funktion $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ die Restriktion $u_{|\partial\Omega}$ wohldefiniert. Zeige, daß

$$\|u\|_{0,2,\partial\Omega} \leq \sqrt[4]{8} \, \|u\|_{1,2,\Omega}$$

gilt. Zeige ferner mit Hilfe eines Dichteschlusses, daß es einen linearen, beschränkten Operator $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ gibt mit der Eigenschaft, daß für alle $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$

$$\gamma_0 u := u_{|\partial\Omega}$$

gilt. Begründe die stetige Einbettung $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\partial\Omega)$. Ist die Einbettung sogar kompakt?