Zusammenfassung der wesentlichen Ergebnisse

der von der Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften der Technischen Universität Berlin zur Erlangung des akademischen Grades Doktor der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.) genehmigten Dissertation

Analysis von Zeitdiskretisierungen des inkompressiblen Navier-Stokes-Problems

vorgelegt von
Dipl.-Math. Etienne Emmrich

Berichter: Prof. Dr. L. Tobiska, Magdeburg
Prof. Dr. R. D. Grigorieff, Berlin

Tag der mündlichen Prüfung: 30. Juli 2001
D 83

Gegenstand der Arbeit ist die mathematische Analyse des impliziten Euler-Verfahrens und der zweischrittigen Formel der rückwärtigen Differenzen (BDF (2)) mit konstanter Schrittweite zur zeitlichen Semidiskretisierung der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen in ihrer druckfreien schwachen Formulierung. Betrachtet werden die originale nichtlineare Approximation als auch eine linearisierte Variante.

1. Mit Hilfe der Theorie der pseudomonotonen Operatoren gelingt der Nachweis der Existenz von Lösungen der nichtlinearen Approximation. Die Einzigkeit ist an gewisse Annahmen gebunden, die sich im zweidimensionalen Fall vereinfachen. Die linearisierte Variante ist eindeutig lösbar.

2. Lösungen sowohl der nichtlinearen als auch der linearisierten Variante sind stabil in $l^2(H^1)$ und $l^\infty(L^2)$. Die diskreten Ableitungen liegen zumindest in $l^{4/3}(V^*)$, wobei V^* der Dualraum des solenoidalen Unterraumes des H_0^1 sei, und genügen weiteren Stabilitätsabschätzungen. Im zweidimensionalen Fall lassen sich A-priori-Abschätzungen für die diskreten Lösungen in stärkeren Normen zeigen, wofür eine Differenzenungleichung mit quadratischem Term mit Hilfe eines diskreten Gronwall-Lemmas aufzulösen ist.

3. Aus den diskreten Näherungswerten lassen sich durch geeigneten, stückweise polynomialen Ansatz kontinuierliche Näherungslösungen konstruieren. Geht die Schrittweite gegen Null, so konvergiert eine Teilfolge der Folge der Näherungslösungen gegen eine schwache Lösung. Die Konvergenz ist stark in $L^q(L^2)$ für $q \in [2, \infty)$, schwach in $L^2(H^1)$ und schwach* in $L^\infty(L^2)$. Der Beweis nutzt die Abschätzungen für die diskreten Lösungen und deren Ableitungen.

4. Der Geschwindigkeitsfehler, gemessen in der $l^2(H^1)$- und $l^\infty(L^2)$-Norm, ist sowohl bei der nichtlinearen als auch linearisierten Variante des impliziten Euler-Verfahrens von erster Ordnung.

5. Unter Ausnutzung der G-Stabilität der BDF (2) mit konstanter Schrittweite läßt sich die parabolische Glättungseigenschaft der Navier-Stokes-Lösung auf das diskrete Problem übertragen. Dies ermöglicht den Beweis von Fehlerabschätzungen höherer Ordnung unter Regularitätsannahmen, die nicht auf das bekannte Problem der globalen Kompatibilität der Daten (überbestimmtes Neumann-Problem für den Anfangsdruck) führen.

6. Der Geschwindigkeitsfehler, gemessen in der $l^2(H^1)$- und $l^\infty(L^2)$-Norm, ist sowohl bei der nichtlinearen als auch linearisierten Variante der BDF (2) von erster Ordnung. Der zeitgewichtete Fehler ist bei der nichtlinearen Approximation von optimaler zweiter Ordnung, bei der linearisierten Variante von der Ordnung 3/2. Die Voraussetzungen an die Regularität der Lösung sind dabei nicht kritisch. Der Beweis der Fehlerabschätzungen höherer Ordnung basiert auf dem Nachweis von Stabilitätsabschätzungen in stärkeren Normen für die Lösung eines diskreten, dualen Hilfsproblems.

7. Der zeitgewichtete Fehler im Druck ist, gemessen in der $l^\infty(L^2/\mathbb{R})$-Norm, von erster Ordnung bei der nichtlinearen Approximation und von der Ordnung 1/2 bei der linearisierten Variante der BDF (2). Die Ordnungsreduktion geht auf den Unterschied zwischen V^* und H^{-1} sowie die Anwendung der Ladyženskaya-Babuška-Brezzi-Bedingung zurück.

8. Die sowohl bei dem Euler-Verfahren als auch bei der BDF (2) auftretenden Fehlerkonstanten und Beschränkungen in der Wahl der Zeitschrittweite hängen stark nichtlinear von der Reynolds-Zahl, der Zeit und A-priori-Schranken der exakten Lösung ab.

Die Ergebnisse zum impliziten Euler-Verfahren sind zu einem Großteil bereits aus der Literatur bekannt. Neu sind hier insbesondere Stabilitätsabschätzungen und Abschätzungen für die diskreten Ableitungen.

Hinsichtlich der BDF (2) wurde bislang nur der Geschwindigkeitsfehler bei der linearisierten Variante untersucht. Unter kaum erfüllbaren globalen Kompatibilitätsbedingungen sind aus der Literatur optimale Abschätzungen zweiter Ordnung bekannt. Unter Regularitätsannahmen, die nicht kritisch sind, ist nur der Beweis der Ordnung 1/4 in der $l^\infty(H^1)$-Norm für den zweidimensionalen, autonomen Fall bekannt.