Elliptische Variationsungleichungen

Hausarbeit zum Seminar Differentialgleichungen bei

PROF. DR. PETRA WITTBOLD

Wintersemester 2006/2007

Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik

vorgelegt von

FILIP RINDLER

Berlin, 6. Dezember 2006

Johan Filip Rindler

Lübecker Str. 29
10559 Berlin

(030) 398 79 111
rindler@math.tu-berlin.de

Inhalt

1 Einleitung

Elliptische Variationsungleichungen sind eine Verallgemeinerung der variationellen Formulierung von Differentialgleichungs- oder Integralgleichungsproblemen. Sie treten oft im Zusammenhang mit so genannten Problemen mit freiem Rand (engl. *free boudary problems*) auf, bei denen der Rand eines Gebietes (etwa der mit Flüssigkeit gefüllte Teil eines porösen Mediums) apriori unbekannt sind. Oftmals hängen sie mit Variationsproblemen zusammen, bei denen ein Funktional auf einem unendlichdimensionalem (Funktionen–) Raum minimiert werden soll.

Beginnend mit einem Beispiel aus der Mechanik, dem elastischen Hindernisproblem, wird in Abschnitt 2 versucht zu motivieren, warum Variationsungleichungen interessant sind. Danach wird eine systematische Theorie entwickelt. Zunächst wenden wir uns in Abschnitt 3 dem linearen Fall zu, der auf der Theorie konvexer Mengen in Hilberträumen fußt. Nach der zentralen Existenz- und Eindeutigkeitsaussage widmen wir uns der Frage der Stabilität gegenüber Störungen an den Daten. Nach der Theorie gehen wir zurück zur Anwendung und nutzen die gewonnenen Ergebnisse, um das elastische Hindernisproblem zu lösen und zu diskutieren. Schließlich behandeln wir Elemente der nichtlinearen Theorie und gehen insbesondere auf den Zusammenhang zu Inklusionsproblemen mengenwertiger Operatoren ein (Abschnitt 4). Einige Anmerkungen und Ergänzungen sowie Literaturhinweise finden sich im letzten Abschnitt 5.

Insbesondere Herrn Dr. Etienne Emmrich bin ich zu großem Dank verpflichtet. Seine vielen kleinen und großen Hinweise haben diesen Text wesentlich verbessert. Mein Dank gilt weiterhin Frau Professor Dr. Petra Wittbold.

Hinweise auf Fehler jeglicher Art bitte an `rindler@math.tu-berlin.de`.

2 Einführende Beispiele

Zunächst wollen wir uns dem Thema durch zwei Beispiele nähern.

2.1 Endlichdimensionale Minimierung

Wir betrachten den Hilbertraum $\mathbb{R}^d$ mit dem üblichen Skalarprodukt „$\cdot$". Sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$ eine nichtleere, abgeschlossene, konvexe Menge und $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^d)$ eine stetig differenzierbare Funktion. Wir suchen nun Punkte $x_0 \in K$ mit

$$\Phi(x_0) = \min_{x \in K} \Phi(x). \tag{2.1}$$

Nehmen wir einmal die Existenz eines solchen Punktes x_0 an. Wegen der Konvexität von K liegt die Strecke $\lambda x_0 + (1-\lambda)x$, $\lambda \in [0,1]$, für alle $x \in K$ ganz in K. Aus der Minimumeigenschaft von x_0 folgt damit die **Variationsungleichung**

$$\nabla\Phi(x_0) \cdot (x - x_0) \geq 0 \qquad \forall x \in K.$$

Wäre nämlich $\nabla\Phi(x_0) \cdot (\tilde{x} - x_0) < 0$ für ein $\tilde{x} \in K$, so würde für

$$\phi(t) := \Phi(x_0 + t(\tilde{x} - x_0)), \qquad t \in [0,1],$$

nach der Kettenregel folgen, dass

$$\phi'(t) = \nabla\Phi(x_0) \cdot (\tilde{x} - x_0) < 0 \qquad \forall t \in (0,1).$$

Damit wäre ϕ streng monoton fallend und wir hätten

$$\Phi(\tilde{x}) = \phi(1) < \phi(0) = \Phi(x_0).$$

Dies widerspricht aber der Minimalität von $\Phi(x_0)$.

Ist K zusätzlich beschränkt, also kompakt, so folgt die Existenz einer Lösung $x_0 \in K$ des Minimierungsproblems (2.1) sofort aus dem Weierstraßschen Extremalprinzip. Ist K nicht beschränkt, so muss es keine Lösung geben (betrachte etwa $\Phi(x) := -x$, $K = \mathbb{R}$). Lösbarkeit kann gleichwohl gesichert werden, falls Φ **schwach koerzitiv** ist, das heißt

$$\lim_{|x| \to +\infty} \Phi(x) = +\infty$$

Die schwache Koerzitivität impliziert nämlich, dass wir aus K für ein geeignet groß gewähltes $N \in \mathbb{N}$ eine beschränkte, wieder konvexe Teilmenge $K_1 \subseteq K$ mit einem Punkt $x \in K_1$ ausschneiden können, so dass $\Phi(x) < N$ und $\Phi(y) \geq N$ für alle $y \in \mathbb{R}^d \setminus K_1$. Damit haben wir diesen Fall auf den vorherigen zurückgeführt und erhalten wieder die Lösbarkeit des Problems. Ähnlich werden wir später auch im allgemeinen Fall vorgehen.

2.2 Hindernisproblem

Gegenstand des elastischen **Hindernisproblems** (engl. *obstacle problem*) ist die Verformung einer am Rand eingespannten elastischen Membran, deren mögliche Positionen durch ein Hindernis eingeschränkt ist. In Abbildung 1 ist die Situation dargestellt: Wir betrachten ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und eine Hindernisfunktion $g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ mit

$$g|_{\partial\Omega} \leq 0$$

Weiter sei idealisierend angenommen, dass sich die Membran beim Spannen über das Hindernis nur vertikal bewegt, das heißt, die Deformation der Membran ist gegeben durch

$$(x, y) \mapsto (x, y, u(x, y)) \qquad (x, y) \in \Omega.$$

Gesucht ist nun die Funktion $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, welche die Höhe der Membran an einem Punkt aus $\overline{\Omega}$ angibt. Die Membran ist am Rand $\partial\Omega$ von Ω eingespannt und kann das Hindernis nicht durchdringen, also gilt

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{und} \quad u \geq g \text{ in } \Omega.$$

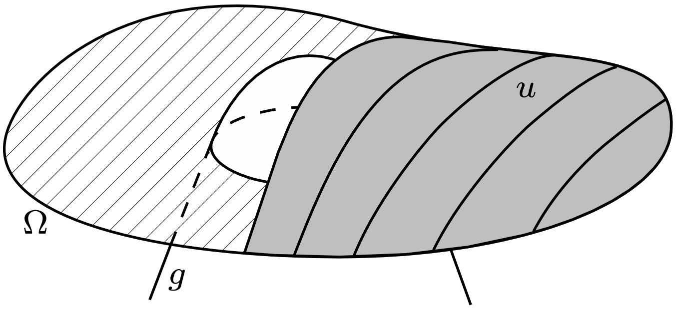

Abbildung 1: Gebiet Ω mit Hindernis g und Lösungsfunktion u

Die Verformung einer elastischen Membran benötigt Energie, die im Material in Form von potentieller Energie gespeichert wird. Ist die verformende Kraft nicht mehr vorhanden, so wird sich das Material in seinen Ausgangszustand zurück bewegen. Wir betrachten hier zunächst den Fall $\overline{\Omega} = [0, 1]^2 \in \mathbb{R}^2$, der allgemeine Fall ist ähnlich. Für $h = 1/N$, $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, betrachten wir das äquidistante Gitter mit $x_i = y_i = ih$, $i = 0, \ldots, N-1$, und nehmen an, u wäre jeweils auf den Quadraten $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ konstant. Experimentell findet man, dass die gespeicherte Energie in einem solchen Quadrat $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ nur von den Verformungen der Membran in die Richtungen x und y,

$$\frac{u(x_{i+1}, y_j) - u(x_i, y_j)}{h} \quad \text{und} \quad \frac{u(x_i, y_{j+1}) - u(x_i, y_j)}{h},$$

sowie von der Masse ρh^2, ρ die Dichte der Membran, des Membranquadrats abhängt. Der Einfachheit halber sei $\rho = 1$. Mit einer Energiedichtefunktion $\phi : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ erhalten wir also als potentielle Energie in dem Quadrat $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$

$$E_{i,j}(u) = h^2 \phi \left(\frac{u(x_{i+1}, y_j) - u(x_i, y_j)}{h}, \frac{u(x_i, y_{j+1}) - u(x_i, y_j)}{h} \right).$$

Die gesamte potentielle Energie über alle Quadrate $E_h(u)$ erhält man nun durch Summation:

$$E_h(u) = \sum_{i,j=0}^{N-1} E_{i,j} = \sum_{i,j=0}^{N-1} h^2 \phi \left(\frac{u(x_{i+1}, y_j) - u(x_i, y_j)}{h}, \frac{u(x_i, y_{j+1}) - u(x_i, y_j)}{h} \right).$$

Ist $u \in C^1(\overline{\Omega})$ und $\phi \in C(\mathbb{R}^2)$, so folgt mit dem Zwischenwertsatz die Existenz von $\xi_{i,j}, \eta_{i,j} \in [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ mit

$$E_h(u) = \sum_{i,j=0}^{N-1} h^2 \phi\left(\frac{\partial u}{\partial x}(\xi_{i,j}), \frac{\partial u}{\partial y}(\eta_{i,j})\right).$$

Diese Riemannsche Zwischensumme konvergiert für $h \to 0$ (oder äquivalent $N \to +\infty$) gegen die potentielle Energie

$$V(u) := \int_\Omega \phi(\nabla u(x))\, \mathrm{d}x,$$

siehe hierzu etwa [10, §7].

Im Fall linearer Elastizitätstheorie wählt man (siehe [12, Example 61.6])

$$\phi(v) := \frac{1}{2}|v|^2, \qquad v \in \mathbb{R}^2,$$

wobei $|.|$ die euklidische Norm im $\mathbb{R}^2$ bezeichne. Damit erhält man für V das *Dirichletintegral* (hier und im Folgenden schreiben wir wie üblich nur u statt $u(x)$)

$$V(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\; \mathrm{d}x, \tag{2.2}$$

Wir führen jetzt noch eine zusätzliche vertikal wirkende Kraft mit Dichte $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ein, wobei positive Werte von f eine nach oben gerichtete Kraft anzeigen. Die durch diese Kraft verrichtete Arbeit ist dann

$$F(u) := \int_\Omega fu\, \mathrm{d}x.$$

Damit ist die gesamte nach der Deformation in der Membran gespeicherte Energie

$$J(u) := V(u) - F(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\; \mathrm{d}x - \int_\Omega fu\, \mathrm{d}x. \tag{2.3}$$

Es gilt nun das physikalische Prinzip, dass ein System immer den Zustand minimaler Energie unter den erlaubten Zuständen wählen wird. Erlaubt heißt in diesem Fall, dass $u|_{\partial\Omega} = 0$ und $u \geq g$ in Ω. Seien die erlaubten Funktionen in der Menge K zusammengefasst. Damit haben wir das folgende **Variationsproblem**: Für ein Hindernis $g \leq 0$ auf $\partial\Omega$ und eine Kraftdichte f suchen wir eine Funktion $u \in K$, so dass das Energiefunktional J minimal wird:

$$J(u) = \min_{v \in K} J(v). \tag{2.4}$$

Die physikalische Intuition lehrt uns, dass es eine eindeutige Lösung gibt, insbesondere, dass wir es in der Tat mit einem Minimum und nicht nur mit einem Infimum zu tun haben.

Wir werden auf das Beispiel später zurück kommen und die obige Problemstellung präzisieren, insbesondere werden wir die auftretenden Funktionenräume und K genauer spezifizieren. Außerdem werden wir die Verbindung mit Variationsungleichungen aufzeigen.

3 Variationsungleichungen mit linearem Operator

Wir wenden uns nun der Theorie der Variationsungleichungen zu. Zunächst betrachten wir nur Probleme, in denen der auftretende Operator linear ist.

3.1 Projektionen auf konvexe Mengen in Hilberträumen

Sei im Folgenden H stets ein reeller Hilbertraum mit innerem Produkt $(.,.)$ und zugehöriger Norm $\|.\|$. Die Anwendung eines stetigen linearen Funktionals $f \in H^*$ aus dem Dualraum H^* von H auf ein Element $u \in H$ notieren wir mittels der dualen Paarung $\langle .,. \rangle$ als $\langle f, u \rangle$.

Zunächst benötigen wir einige Aussagen über Projektionen auf nichtleere, abgeschlossene, konvexe Mengen in Hilberträumen.

Satz 3.1 (Projektionssatz). *Sei $K \subseteq H$ eine nichtleere, abgeschlossene und konvexe Menge. Dann gibt es zu jedem $f \in H$ genau ein $u_f \in K$ mit*

$$\|f - u_f\| = \min_{v \in K} \|f - v\| . \tag{3.1}$$

*Dieses u_f heißt **Bestapproximation** von f bezüglich K.*

Beweis. Zur Existenz: Man wähle eine *Minimierungsfolge*, das heißt eine Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$ mit

$$\lim_{n\to+\infty} \|f - u_n\| = \alpha := \inf_{v\in K} \|f - v\| \geq 0.$$

Eine solche existiert nach Definition des Infimums. Aus der in jedem Hilbertraum gültigen Parallelogrammgleichung

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2 , \qquad \forall v, w \in H$$

folgt mit $v = f - u_m$ und $w = f - u_n$ $(m, n \geq 1)$

$$\|2f - u_m - u_n\|^2 + \|u_m - u_n\|^2 = 2\|f - u_m\|^2 + 2\|f - u_n\|^2 \qquad \forall m, n \geq 1.$$

Wegen der Konvexität von K gilt $(u_m + u_n)/2 \in K$ und daher $\|f - (u_m + u_n)/2\| \geq \alpha$. Somit folgt

$$\begin{aligned}
\|u_m - u_n\|^2 &= 2\left(\|f - u_m\|^2 + \|f - u_n\|^2\right) - 4\left\|f - \frac{u_m + u_n}{2}\right\|^2 \\
&\leq 2\left(\|f - u_m\|^2 + \|f - u_n\|^2\right) - 4\alpha^2 \\
&\longrightarrow 0 \quad \text{für } m, n \to +\infty,
\end{aligned}$$

denn $\|f - u_m\| \to \alpha$, $\|f - u_n\| \to \alpha$ für $m, n \to +\infty$. Damit ist $\{u_n\}$ eine Cauchyfolge, also wegen der Vollständigkeit von H und Abgeschlossenheit von K konvergent mit Grenzwert $u_f \in K$. Nach Voraussetzung an $\{u_n\}$ ist dann bereits

$$\|f - u_f\| = \lim_{n\to+\infty} \|f - u_n\| = \alpha = \inf_{v\in K} \|f - v\| .$$

Zur Eindeutigkeit: Gilt (3.1) für $u_f, u'_f \in K$, so folgt analog zu oben aus der Parallelogrammgleichung

$$\|u_f - u'_f\|^2 = 2\left(\|f - u_f\|^2 + \|f - u'_f\|^2\right) - 4\alpha^2 = 0,$$

also $u_f = u'_f$. □

Die **Bestapproximation** u_f von f bezüglich K bezeichnen wir auch als

$$P_K(f) := u_f$$

und nennen $P_K : H \to K$ den **Projektionsoperator** auf K. Es ist klar, dass $P_K^2 = P_K$, denn $P_K = \mathrm{id}$ auf K. P_K ist aber nicht linear, denn dazu müsste das Bild K von P_K ein linearer Unterraum von H sein, was aber natürlich im Allgemeinen nicht der Fall ist.

Lemma 3.2. *Sei $K \subseteq H$ eine nichtleere, abgeschlossene und konvexe Menge. Für $f \in H$ gilt genau dann $u = P_K(f)$, wenn $u \in K$ und*

$$(f - u, v - u) \leq 0 \qquad \forall v \in K. \tag{3.2}$$

Beweis. Sei zunächst $u = P_K(f)$. Wir betrachten für beliebiges $v \in K$ die reelle Funktion

$$\psi_v(t) := \|f - u - t(v - u)\|^2 = \|f - u\|^2 - 2t(f - u, v - u) + t^2 \|v - u\|^2, \quad t \in [0, 1].$$

Gleichung (3.1) impliziert, dass ψ_v in $t = 0$ minimal wird. Dann folgt für die rechtsseitige Ableitung ψ'_v von ψ_v in $t = 0$, dass

$$0 \leq \psi'_v(0) = -2(f - u, v - u),$$

also gilt (3.2).

Sei umgekehrt (3.2) erfüllt. Es folgt für beliebiges $v \in K$ mit der Cauchy–Schwarz–Ungleichung

$$\begin{aligned} 0 \leq (f - u, (u - f) + (f - v)) &= -\|f - u\|^2 + (f - u, f - v) \\ &\leq -\|f - u\|^2 + \|f - u\| \|f - v\|. \end{aligned}$$

Also $\|f - u\| \leq \|f - v\|$ für alle $v \in K$ und damit

$$\|f - u\| = \min_{v \in K} \|f - v\|.$$

Dies impliziert bereits $u = P_K(f)$, denn gemäß Satz 3.1 ist die Bestapproximation von f bezüglich K das einzige Element aus K, für das (3.1) gilt. □

Beispiel 3.3 (Deutung im Zweidimensionalen). Im Zweidimensionalen kann man die Aussage von Lemma 3.2 geometrisch deuten. Ist nämlich $H = \mathbb{R}^2$ mit dem euklidischen Skalarprodukt, $K \subseteq \mathbb{R}^2$ eine nichtleere, abgeschlossene, konvexe Menge und $f \notin K$, so gilt

$$\cos\alpha = \frac{(f - P_K(f), v - P_K(f))}{\|f - P_K(f)\| \|v - P_K(f)\|} \leq 0,$$

wobei $\alpha \in [0, \pi]$ der Winkel zwischen den Vektoren $f - P_K(f)$ und $v - P_K(f)$ ist, siehe Abbildung 2. Die obige Ungleichung besagt nun nichts anderes als $\alpha \in [\pi/2, \pi]$, der Winkel α ist somit stumpf. Dies ist natürlich genau das erwartete Verhalten, denn P_K sollte ein $u \notin K$ senkrecht auf den Rand von K projizieren (wegen der Abstandsminimierung). Das letzte Lemma sagt aus, dass dies in gewissem Sinne auch im allgemeinen (unendlichdimensionalen) Fall so ist. Für $f \in K$ ist $P_K(f) = f$ und wir können keinen Winkel messen.

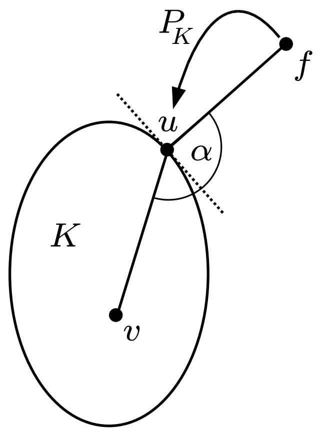

Abbildung 2: Projektion von f auf K

3.2 Lösbarkeit und Eindeutigkeit

Grundlegend sind die folgenden Begriffe:

Definition 3.4. *Eine Bilinearform $a(.,.) : H \times H \to \mathbb{R}$ heißt **beschränkt** falls es ein $\beta > 0$ gibt, so dass*

$$a(u,v) \leq \beta \|u\| \|v\| \qquad \forall u, v \in H.$$

*Die Bilinearform $a(.,.)$ heißt **stark positiv**, falls es ein $\mu > 0$ gibt, so dass*

$$a(u,u) \geq \mu \|u\|^2 \qquad \forall u \in H.$$

Beispiel 3.5 (Elliptische Differentialoperatoren). Eine wichtige Klasse stark positiver und beschränkter Bilinearformen sind die von **gleichmäßig elliptischen Differentialoperatoren** mit beschränkten Koeffizienten erzeugten. Mit dem formalen Gradienten von u,

$$\nabla u := \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_d} \right),$$

hat ein solcher Operator die Form

$$Lu := \operatorname{div}(A \nabla u) = \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right),$$

wobei $A := [a_{ij}]_{i,j} \in L^\infty(\Omega)^{d\times d}$, das heißt $a_{ij} = a_{ij}(.) \in L^\infty(\Omega)$, und A *gleichmäßig positiv definit* sei, das heißt es gibt $\mu > 0$, so dass

$$v^T A(x)\, v = \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x) v_i v_j \geq \mu\, |v|^2 \qquad \forall v \in \mathbb{R}^2 \text{ und f.ü. in } \Omega \ni x.$$

Die von diesem Differentialoperator erzeugte Bilinearform

$$a(u,v) := \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i}\, \mathrm{d}x \qquad \forall u,v \in H_0^1(\Omega),$$

ist dann auf dem Produkt von Sobolevräumen[1] $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ wohldefiniert, stark positiv und beschränkt.

Mit einer beschränkten Bilinearform $a(.,.) : H \times H \to \mathbb{R}$ kann man einen stetigen linearen Operator $A : H \to H^*$ durch

$$Au := a(u,.), \quad \text{also} \quad \langle Au, v\rangle := a(u,v) \qquad \forall u,v \in H \tag{3.3}$$

assoziieren. Die Wohldefiniertheit und Stetigkeit folgt hierbei aus der Beschränktheit von $a(.,.)$. Ist $a(.,.)$ außerdem stark positiv, so ist A **koerzitiv**, das bedeutet

$$\lim_{\|v\|\to+\infty} \frac{\langle Av, v\rangle}{\|v\|} = +\infty \qquad \forall v \in H. \tag{3.4}$$

Die folgende Problemstellung korrespondiert zur schwachen Formulierung der Differentialungleichung

$$Lu \geq f \qquad \text{in } \Omega$$

unter der Nebenbedingung $u \in K$, wobei K eine nichtleere, abgeschlossene, konvexe Menge ist, die Nebenbedingungen an die Funktion u modelliert.

Problem 3.6 (Elliptische Variationsungleichung). *Zu einer gegebenen beschränkten, stark positiven Bilinearform $a(.,.)$ und einer nichtleeren, abgeschlossenen, konvexen Menge $K \subseteq H$ ist eine Funktion u gesucht, welche die* ***elliptische Variationsungleichung*** *(engl.* elliptic variational inequality, EVI*)*

$$\begin{cases} u \in K, \\ a(u, v-u) \geq \langle f, v-u\rangle \qquad \forall v \in K \end{cases} \tag{3.5}$$

für gegebenes $f \in H^*$ erfüllt.

Auch wenn wir eine Bi*linear*form betrachten, ist das Problem doch nicht linear: Dafür müsste nämlich auch noch K ein linearer Unterraum von H sein. Dennoch können wir als Erweiterung des klassischen Lemmas von Lax–Milgram (siehe etwa [5]) zeigen:

[1] Zur Erinnerung: $H^1(\Omega)$ ist der Sobolevraum von $L^2(\Omega)$–Funktionen, deren distributionelle partielle Ableitungen ebenfalls in $L^2(\Omega)$ liegen. $H_0^1(\Omega)$ ist der Abschluss von $C_0^\infty(\Omega)$ (unendlich oft differenzierbare Funktionen mit kompaktem Träger in Ω) in $H^1(\Omega)$. Funktionen aus $H_0^1(\Omega)$ repräsentieren Funktionen mit homogenen Dirichlet–Randbedingungen. Schließlich bezeichnet $H^{-1}(\Omega)$ den Dualraum von $H_0^1(\Omega)$. Für Details vergleiche man [1].

Satz 3.7 (Eindeutige Lösbarkeit; Stampacchia 1964). *Sei $K \subseteq H$ eine nichtleere, abgeschlossene und konvexe Menge und sei $a(.,.) : H \times H \to \mathbb{R}$ eine beschränkte, stark positive Bilinearform. Dann hat* (3.5) *für jedes $f \in H^*$ eine eindeutige Lösung $u \in K$. Ist $a(.,.)$ zusätzlich symmetrisch, so ist u außerdem der eindeutige Minimierer des* ***quadratischen Funktionals***

$$J(v) := \frac{1}{2}a(v,v) - \langle f, v\rangle$$

auf K:

$$J(u) = \min_{v \in K} J(v).$$

Beweis. Zur Existenz und Eindeutigkeit: Sei zunächst $a(.,.)$ zusätzlich symmetrisch, also ein inneres Produkt auf H. Dann folgt aus Beschränktheit und starker Positivität, dass die von $a(.,.)$ induzierte Norm zur Originalnorm $\|.\|$ äquivalent ist und H somit auch bezüglich $a(.,.)$ und dieser neuen Norm ein Hilbertraum ist. Nach dem Rieszschen Darstellungssatz[2] angewandt auf den Raum H mit dem Skalarprodukt $a(.,.)$ gibt es nun ein $\tilde{f} \in H$, so dass

$$\langle f, v\rangle = a(\tilde{f}, v) \qquad \forall v \in H.$$

Wegen Lemma 3.2 gilt für $u := P_K(\tilde{f})$ im Raum $(H, a(.,.))$

$$\langle f, v-u\rangle - a(u, v-u) = a(\tilde{f}, v-u) - a(u, v-u) = a(\tilde{f}-u, v-u) \leq 0 \qquad \forall v \in K,$$

also

$$a(u, v-u) \geq \langle f, v-u\rangle \qquad \forall v \in K.$$

Ist $a(.,.)$ nicht symmetrisch, so wird $a(.,.)$ aufgeteilt in symmetrischen und antisymmetrischen Teil:

$$a(u,v) = a_S(u,v) + a_A(u,v) \qquad \forall u, v \in H$$

mit

$$a_S(u,v) := \frac{a(u,v)+a(v,u)}{2}, \quad a_A(u,v) := \frac{a(u,v)-a(v,u)}{2}, \qquad u, v \in H.$$

Sei außerdem für $t \in \mathbb{R}$

$$a_t(u,v) = a_S(u,v) + t a_A(u,v) \qquad \forall u, v \in H.$$

Wir betrachten für $t \in \mathbb{R}$ das parametrisierte Problem

$$\begin{cases} u \in K, \\ a_t(u, v-u) \geq \langle f, v-u\rangle \qquad \forall v \in K \end{cases} \tag{3.6}$$

und setzen

$$T := \{t \in \mathbb{R} \mid \text{für alle } f \in H^* \text{ hat Problem (3.6) eine eindeutige Lösung}\}.$$

[2] Zur Erinnerung: Der Rieszsche Darstellungssatz besagt, dass (im reellen Fall) jedes $f \in H^*$ mit genau einem $j(f) \in H$ korrespondiert und $\langle f, v\rangle = (j(f), v)$ $\forall v \in H$. Darüber hinaus ist $j : H^* \to H$ ein isometrischer Isomorphismus, man schreibt auch $H \cong H^*$. Für Details vergleiche man [13, Theorem 2.E].

Nach obiger Argumentation wissen wir bereits, dass $0 \in T$. Wir werden im Folgenden zeigen, dass $T = \mathbb{R}$. Sei dazu $t_0 \in T$. Nun wenden wir einen Trick an und betrachten für fixiertes $t \in \mathbb{R}$ die Variationsungleichung

$$\begin{cases} u_w \in K, \\ a_{t_0}(u_w, v - u_w) \geq \langle f, v - u_w \rangle + (t_0 - t) a_A(w, v - u_w) \qquad \forall v \in K \end{cases} \tag{3.7}$$

für beliebiges $w \in K$. Da $f + (t_0 - t) a_A(w, .) \in H^*$ und $t_0 \in T$, hat dieses Problem eine eindeutige Lösung $u_w \in K$. Diese hängt von w ab, wir schreiben $u_w = L_t(w)$. Für $w_1, w_2 \in K$ erhalten wir so Lösungen $u_1 = L_t(w_1), u_2 = L_t(w_2) \in K$. Die Variationsungleichung (3.7) ergibt nun für $v = u_2$ bzw. $v = v_1$

$$\begin{aligned} a_{t_0}(u_1, u_2 - u_1) &\geq \langle f, u_2 - u_1 \rangle + (t_0 - t) a_A(w_1, u_2 - u_1), \\ a_{t_0}(u_2, u_1 - u_2) &\geq \langle f, u_1 - u_2 \rangle + (t_0 - t) a_A(w_2, u_1 - u_2). \end{aligned}$$

Subtrahieren und Ausnutzen der Linearität liefert

$$a_{t_0}(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq (t_0 - t) a_A(w_1 - w_2, u_1 - u_2).$$

Mit starker Positivität von $a_{t_0}(.,.)$ und Beschränktheit von $a_A(.,.)$ (jeweils mit den gleichen Konstanten wie bei $a(.,.)$), erhalten wir

$$\mu \left\| u_1 - u_2 \right\| \leq \beta \left| t_0 - t \right| \left\| w_1 - w_2 \right\|.$$

Falls $|t_0 - t| \leq \mu/(2\beta)$, das heißt $t \in [t_0 - \mu/(2\beta), t_0 + \mu/(2\beta)]$, erhalten wir also

$$\left\| u_1 - u_2 \right\| \leq \frac{\beta}{\mu} \left| t_0 - t \right| \left\| w_1 - w_2 \right\| \leq \frac{1}{2} \left\| w_1 - w_2 \right\|.$$

Dies ist aber nichts anderes als die Kontraktivität von $L_t : K \to K$. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz gibt es damit genau ein $u \in K$ mit $u = L_t(u)$. Einsetzen eines solchen Fixpunktes u in (3.7) zeigt, dass u die eindeutige Lösung von (3.6) ist. Damit ist für $t_0 \in T$ auch $[t_0 - \mu/(2\beta), t_0 + \mu/(2\beta)] \subseteq T$. Wiederholte Anwendung dieses Arguments liefert $T = \mathbb{R}$, insbesondere also $1 \in T$, und wir haben die Lösbarkeit unseres Problems gezeigt.

Zum Zusatz: Sei nun u Lösung des symmetrischen Problems. Unter Ausnutzung von Symmetrie, Bilinearität und starker Positivität von $a(.,.)$ sowie von (3.5) erhalten wir für beliebiges $v \in K$:

$$\begin{aligned} J(v) = J(u + v - u) &= \frac{1}{2} a(u + v - u, u + v - u) - \langle f, u + v - u \rangle \\ &= J(u) + \frac{1}{2} a(v - u, v - u) + a(u, v - u) - \langle f, v - u \rangle \\ &\geq J(u) + \frac{\mu}{2} \left\| v - u \right\|^2. \end{aligned}$$

Damit ist v genau dann Minimierer von J auf K, wenn $v = u$. □

Es gibt einige weitere Beweisvarianten, siehe etwa [6, Theorem 2.1], [2, Theorem 11.2.1].

Bemerkung 3.8 (Lemma von Lax–Milgram). Ist $K = H$, so kann man durch Testen mit $v = \pm w + u$ zeigen, dass u sogar die Variations*gleichung*

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle \qquad \forall v \in H$$

löst. Somit erhalten wir das Lemma von Lax–Milgram als Korollar.

3.3 Stabilität

Auch bei Variationsungleichungen kann man sich fragen, inwiefern kleine Änderungen an den Problemdaten auch nur kleine Änderungen an der Lösung bewirken. Wie bei Variationsgleichungen sind solche Aussagen insbesondere für die numerische Berechnung einer Lösung unverzichtbar. Eindeutig lösbare, stabile Probleme heißen auch **wohlgestellt** (engl. *well-posed*).

Stabilität bezüglich der rechten Seite liefert der folgende Satz.

Satz 3.9 (Stabilität bezüglich f). *Sind u_1, u_2 die (eindeutigen) Lösungen der Variationsungleichung* (3.5) *zu rechten Seiten $f_1, f_2 \in H^*$, so gilt*

$$\|u_1 - u_2\| \leq \frac{1}{\mu} \|f_1 - f_2\|_* ,$$

das heißt, $f \mapsto u$ ist Lipschitz–stetig.

Beweis. Subtraktion der Variationsungleichungen für u_1 und u_2 mit $v = u_2$ bzw. $v = u_1$ sowie Ausnutzung von starker Positivität und Cauchy–Schwarz–Ungleichung ergibt

$$\mu \|u_1 - u_2\|^2 \leq a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq \langle f_1 - f_2, u_1 - u_2 \rangle \leq \|f_1 - f_2\|_* \|u_1 - u_2\| .$$

Daraus folgt bereits der behauptete Zusammenhang. □

Im Unterschied zu Variationsgleichungen, bei denen Lösung und Testfunktionen aus dem ganzen Raum stammen können, ist man bei Variations*un*gleichungen aber nicht nur an der Abhängigkeit der Lösung von der rechten Seite f, sondern auch am Zusammenhang der Lösung mit der konvexen Menge K, in der die Lösung gesucht wird (und aus der die Testfunktionen stammen), interessiert. Um dieser Frage nachzugehen, benötigen wir zunächst einen geeigneten Konvergenzbegriff für Mengen.

Definition 3.10. *Sei $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen. Der **Limes inferior** und der **Limes superior** der Folge sind wie folgt definiert:*

$$\liminf_n A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{l=n}^{\infty} A_l \quad \textit{und} \quad \limsup_n A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{l=n}^{\infty} A_l,$$

das heißt $\liminf_n A_n$ *enthält alle Punkte, die ab einem gewissen Index in allen A_n vorkommen, und* $\limsup_n A_n$ *enthält alle Punkte, die in unendlich vielen A_n vorkommen.*

Definition 3.11. *Sei $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von abgeschlossenen Mengen. Die Folge der K_n **konvergiert im Inneren** gegen die abgeschlossene Menge K, notiert als*

$$K_n \xrightarrow{\text{int}} K,$$

falls

$$K = \overline{\limsup_n K_n} = \overline{\liminf_n K_n}.$$

Es ist nach Definition klar, dass nur abgeschlossene Mengen als Grenzwerte der Konvergenz im Inneren in Betracht kommen. Zusätzlich gilt:

Lemma 3.12. *Falls alle K_n konvex sind und $K_n \xrightarrow{\text{int}} K$, dann ist auch K konvex.*

Beweis. Seien zunächst $u, v \in \liminf_n K_n$, das heißt $u, v \in K_n$ für alle $n \geq N$ und N genügend groß. Da K_n konvex ist, ist auch $w_\lambda := \lambda u + (1-\lambda)v \in K_n$ für alle $\lambda \in [0,1]$, also $w_\lambda \in \liminf_n K_n \subseteq K$ und $\liminf_n K_n$ ist konvex. Da die abgeschlossene Hülle einer konvexen Menge wieder konvex ist (Konvexkombinationen können durch Konvexkombinationen approximiert werden), folgt die Behauptung. $\square$

Um unser Stabilitätsresultat beweisen zu können, benötigen wir zunächst ein auch in anderem Kontext vielfach nützliches Hilfsresultat, siehe etwa [4, Theorem 4.2]:

Lemma 3.13 (Minty–Trick). *Problem* (3.5) *ist zu dem Problem*

$$\begin{cases} u \in K, \\ a(v, v-u) \geq \langle f, v-u \rangle \qquad \forall v \in K \end{cases} \tag{3.8}$$

äquivalent.

Beweis. Sei zunächst $u \in K$ Lösung der Variationsungleichung (3.5), gelte also

$$a(u, v-u) \geq \langle f, v-u \rangle \qquad \forall v \in K.$$

Dann folgt mit (starker) Positivität und Bilinearität von $a(.,.)$, dass

$$a(v, v-u) = a(u, v-u) + a(v-u, v-u) \geq a(u, v-u) \geq \langle f, v-u \rangle \qquad \forall v \in K.$$

Ist umgekehrt (3.8) erfüllt, so setzt man $v = u + t(w-u) \in K$ für $w \in K$ und $t > 0$. Dann gilt

$$a(u + t(w-u), t(w-u)) \geq \langle f, t(w-u) \rangle.$$

Teilen durch t und der Grenzübergang $t \to 0$ ergibt wegen der Stetigkeit von $a(.,.)$:

$$a(u, w-u) \geq \langle f, w-u \rangle \qquad \forall w \in K,$$

und somit (3.5). $\square$

Wir können nun eine Stabilitätsaussage bezüglich der Menge K zeigen:

Satz 3.14 (Stabilität bezüglich K). *Seien $K \subseteq H$ und $K_n \subseteq H$, $n \in \mathbb{N}$, jeweils nichtleere, abgeschlossene und konvexe Mengen mit $K_n \xrightarrow{\text{int}} K$. Dann konvergieren die Lösungen u_n der parametrisierten Probleme*

$$\begin{cases} u_n \in K_n, \\ a(u_n, v-u_n) \geq \langle f, v-u_n \rangle \qquad \forall v \in K_n \end{cases} \tag{3.9}$$

(stark) gegen die Lösung u des Problems

$$\begin{cases} u \in K, \\ a(u, v-u) \geq \langle f, v-u \rangle \qquad \forall v \in K. \end{cases} \tag{3.10}$$

Beweis. Zunächst sind alle Probleme gemäß Satz 3.7 eindeutig lösbar.

1. Schritt: *Apriori–Abschätzung und schwache Konvergenz*. Sei $v \in \liminf_n K_n$, also $v \in K_n$ für alle $n \geq M$ mit $M \in \mathbb{N}$ genügend groß. Für alle diese n erhalten wir aus der Variationsungleichung (3.9) durch Multiplikation mit -1 und unter Ausnutzung der starken Positivität von $a(.,.)$

$$\mu \|u_n\|^2 - a(u_n, v) \leq a(u_n, u_n - v) \leq \langle f, u_n - v\rangle \leq \|f\|_* \|u_n - v\| \qquad \forall v \in K_n.$$

Mit der Beschränktheit von $a(.,.)$ sowie der Dreiecksungleichung folgt weiter

$$\mu \|u_n\|^2 \leq \|f\|_* \|u_n - v\| + \beta \|u_n\| \|v\| \leq (\|f\|_* + \beta \|v\|) \|u_n\| + \|f\|_* \|v\| .$$

Umformen ergibt mit der Abkürzung $M := \mu^{-1} (\|f\|_* + \beta \|v\|)$ die quadratische Ungleichung

$$\|u_n\|^2 - M \|u_n\| \leq \frac{\|f\|_* \|v\|}{\mu}.$$

Quadratische Ergänzung mit $(M/2)^2$ liefert

$$\left(\|u_n\| - \frac{M}{2}\right)^2 \leq \frac{\|f\|_* \|v\|}{\mu} + \frac{M^2}{4}.$$

Damit erhalten wir die benötigte Apriori–Abschätzung

$$\|u_n\| \leq \sqrt{\frac{\|f\|_* \|v\|}{\mu} + \frac{M^2}{4}} + \frac{M}{2}, \qquad \forall n \geq M. \tag{3.11}$$

Somit ist nach eventuellem Erhöhen der Schranke die ganze Folge $\{u_n\}$ beschränkt und wir können eine schwach konvergente[3] Teilfolge $\{u_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ auswählen[4], so dass $u_{n_k} \rightharpoonup u \in H$ für $k \to +\infty$.

2. Schritt: *Übergang zum Grenzwert*. Sei zunächst $v \in \liminf_n K_n$, also $v \in K_n$ für alle $n \geq M \in \mathbb{N}$ und M genügend groß. Nach dem Minty–Trick (Lemma 3.13) haben wir für alle k mit $n_k \geq M(v)$

$$a(v, v - u_{n_k}) \geq \langle f, v - u_{n_k}\rangle. \tag{3.12}$$

Da $u_{n_k} \rightharpoonup u$ und $a(v,.) = Av \in H^*$ (man vergleiche (3.3)), erhalten wir

$$\lim_{k\to\infty} a(v, v - u_{n_k}) = a(v, v) - \lim_{k\to\infty} \langle Av, u_{n_k}\rangle = a(v, v) - \langle Av, u\rangle = a(v, v - u).$$

Somit können wir in (3.12) links und rechts zum Grenzwert übergehen und erhalten

$$a(v, v - u) \geq \langle f, v - u\rangle \qquad \forall v \in \liminf_n K_n.$$

[3]Zur Erinnerung: Schwache Konvergenz $v_n \rightharpoonup v$ im Banachraum V bedeutet, dass $\langle f, v_n\rangle \to \langle f, v\rangle$ für alle $f \in V^*$. Im Hilbertraum H bedeutet dies nach dem Rieszschen Darstellungssatz $(w, v_n) \to (w, v)$ für alle $w \in H \cong H^*$, siehe [14, Chapter 2] für Details.

[4]Zur Erinnerung: In reflexiven Banachräumen sind beschränkte Mengen schwach (folgen–) kompakt, siehe etwa [14, Proposition 2.8.6]. Hilberträume sind immer reflexiv, vergleiche [14, Standard Example 2.8.2].

3. Schritt: *Allgemeines* v. Für beliebiges $v \in K = \overline{\liminf_n K_n}$ können wir eine Folge $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \liminf_n K_n$ finden mit $v_k \to v$. Für v_k wissen wir bereits aus dem letzten Schritt, dass

$$a(v, v_k - u) \geq \langle f, v_k - u \rangle.$$

Der Grenzübergang links und rechts liefert wegen der Stetigkeit von $a(.,.)$

$$a(v, v - u) \geq \langle f, v - u \rangle.$$

Wiederum nach dem Minty–Trick erhalten wir, dass u das Grenzproblem (3.10) löst.

4. Schritt: *Schwache Konvergenz der Gesamtfolge* $\{u_n\}$. Der 2. und 3. Schritt lässt sich auf jede beliebige schwach konvergente Teilfolge $\{u_{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ von $\{u_n\}$ anwenden und wir erhalten die Konvergenz all dieser Teilfolgen $\{u_{m_k}\}$ gegen die nach Satz 3.7 eindeutige Lösung von (3.10). Damit hat $\{u_n\}$ nur einen einzigen schwachen Häufungspunkt und konvergiert somit ebenfalls gegen u. Andernfalls gäbe es nämlich eine Teilfolge von $\{u_n\}$, die eine Umgebung U von u in der schwachen Topologie nicht trifft. Nun könnten wir aber aus dieser Teilfolge eine weitere Teilfolge auswählen, die nach dem bereits gezeigten als Teilfolge von $\{u_n\}$ gegen u konvergiert. Dies ist aber ein Widerspruch, denn kein Element dieser Teilfolge kann in U liegen.

5. Schritt: *Starke Konvergenz der Gesamtfolge*. Sei $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $w_n \in K_n$ und $w_n \to u$. Eine solche existiert, da $u \in K = \overline{\liminf_n K_n}$. Nun liefert (3.9) für $f = 0$ zunächst

$$a(u_n, u_n - w_n) \leq \langle f, u_n - w_n \rangle = 0.$$

Damit erhalten wir mit starker Positivität und Bilinearität von $a(.,.)$

$$\begin{aligned} \mu \|u_n - w_n\|^2 &\leq a(u_n - w_n, u_n - w_n) = a(u_n, u_n - w_n) - a(w_n, u_n - w_n) \\ &\leq -a(w_n, u_n - w_n) = -a(w_n - u, u_n - w_n) - a(u, u_n - w_n) \\ &\leq \|w_n - u\| \, \|u_n - w_n\| - \langle Au, u_n - w_n \rangle. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Da aus $w_n \to u$ auch $w_n \rightharpoonup u$ und damit $u_n - w_n \rightharpoonup 0$ folgt, haben wir zunächst $\langle Au, u_n - w_n \rangle \to 0$. Außerdem ist $\|u_n - w_n\|$ beschränkt[5] und $\|w_n - u\| \to 0$ gilt nach Wahl von $\{w_n\}$. Damit konvergiert die rechte Seite in (3.13) gegen 0 und wir haben $u_n - w_n \to 0$ gezeigt. Somit folgt

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_n - u\| \leq \lim_{n\to+\infty} \|u_n - w_n\| + \lim_{n\to+\infty} \|w_n - u\| = 0.$$

Das ist aber nichts anderes als $u_n \to u$. □

3.4 Anwendung auf das Hindernisproblem

Kehren wir nun zu unserem Beispiel aus Abschnitt 2.2 zurück. Wir wollen die möglichen Lösungsfunktionen aus dem Sobolevraum $H_0^1(\Omega)$ wählen. Hierbei sei Ω ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz–Rand. Dann ist das Energiefunktional aus (2.3),

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, \mathrm{d}x - \int_\Omega f u \, \mathrm{d}x, \qquad u \in H_0^1(\Omega), \tag{3.14}$$

[5] Zur Erinnerung: Schwach konvergente Folgen im Banachraum sind beschränkt, siehe etwa [14, Standard Example 3.4.3].

sinnvoll ($\nabla u \in L^2(\Omega)$). Darüber hinaus erfüllen Funktionen aus $H_0^1(\Omega)$ bereits die homogenen Dirichlet–Randbedingungen (am Rand eingespannte Membran). Weiter fordern wir $f \in L^2(\Omega)$, wir könnten sogar $f \in H^{-1}(\Omega)$ zulassen und $\int_\Omega fv \, \mathrm{d}x$ durch $\langle f, v \rangle$ ersetzen.

Wir dürfen nun nicht beliebige Funktion aus $H_0^1(\Omega)$ wählen, sondern nur solche, die das Hindernis nicht durchdringen. Um diesen Sachverhalt spezifizieren zu können, benötigen wir zunächst:

Definition 3.15. *Eine Funktion $v \in H^1(\Omega)$ erfüllt*

$$v \leq 0 \quad \textit{auf } \partial\Omega,$$

wenn $v^+ := \max(0, v) \in H_0^1(\Omega)$.

Für das Hindernis gelte $g \in H^1(\Omega)$ mit $g \leq 0$ auf $\partial\Omega$. Die erlaubten Lösungsfunktionen müssen nun $u \geq g$ in Ω zumindest fast überall erfüllen. Hierzu definieren wir die Menge der zulässigen Lösungen $K \subseteq H_0^1(\Omega)$ wie folgt:

$$K := \left\{ v \in H_0^1(\Omega) \mid v(x) \geq g(x) \text{ für fast alle } x \in \Omega \right\}. \tag{3.15}$$

Man beachte, dass K wohldefiniert ist: Weil obige Definition nur $v(x) \geq g(x)$ *fast überall* in Ω fordert, bewirkt das Abändern der Funktion auf einer Nullmenge auch keine Änderung an der Gültigkeit der Bedingung.

Dass unsere Wahl von g sinnvoll war, zeigt das folgende Lemma.

Lemma 3.16. *Sei $g \in H^1(\Omega)$ mit $g \leq 0$ auf $\partial\Omega$. Dann ist K aus* (3.15) *nichtleer, abgeschlossen und konvex.*

Beweis. Die Funktion $g^+ := \max(g, 0) \in H_0^1(\Omega)$ ist in K enthalten, also gilt $K \neq \emptyset$. Da für zwei Funktionen $u, v \in K$ gilt, dass $u, v \geq g$ fast überall in Ω, also auch

$$\lambda u + (1 - \lambda) v \geq g \qquad \text{f.ü. in } \Omega,$$

ist K konvex. Für die Abgeschlossenheit sei $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq K$ eine Folge in K mit $v_n \to v$ bezüglich der $H_0^1(\Omega)$-Norm für $n \to +\infty$. Dann gibt es eine Teilfolge, die fast überall *punktweise* gegen $v \in H_0^1(\Omega)$ konvergiert (siehe etwa [1, Corollary 2.17]), sei diese Teilfolge wieder mit v_n bezeichnet. Ist A_n die Nullmenge, auf der $v_n \geq g$ nicht gilt und A die Nullmenge, auf der v_n nicht punktweise gegen v konvergiert, so gilt doch immerhin

$$v_n \geq g \qquad \text{auf } \Omega \setminus N \quad \text{ mit } N := A \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

also auch $v \geq g$ auf $\Omega \setminus N$. Da N als abzählbare Vereinigung von Nullmengen wieder eine solche ist, ist K als abgeschlossen erkannt. □

Wir kommen nun zur unser Problem beschreibende Bilinearform $a(.,.)$.

Lemma 3.17. *Die **Dirichletform** $a(.,.) : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$,*

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v \,\mathrm{d}x, \qquad u, v \in H_0^1(\Omega),$$

ist bilinear, beschränkt und stark positiv.

Beweis. Die Dirichletform ist genau das Skalarprodukt in $H_0^1(\Omega)$ und genügt als solches natürlich den Aussagen des Lemmas. □

Bemerkung 3.18. Der Beweis verwendet die Poincaré–Friedrichs–Ungleichung, welche auch allgemeiner für offene Mengen Ω gilt, die nur in eine Richtung beschränkt sind. Für Details vergleiche man [1, Theorem 6.30].

Fassen wir zusammen:

Satz 3.19 (Eindeutige Lösbarkeit des Hindernisproblem). *Seien $g \in H^1(\Omega)$ mit $g \le 0$ auf $\partial\Omega$, $f \in L^2(\Omega)$ und sei $K \subseteq H_0^1(\Omega)$ definiert durch* (3.15)*. Dann hat das Hindernisproblem* (2.4)*,*

$$J(u) = \min_{v \in K} J(v),$$

mit J aus (3.14) *genau eine Lösung $u \in K$. Diese ist zugleich Lösung der Variationsungleichung*

$$\begin{cases} u \in K, \\ \int_\Omega \nabla u \nabla (v-u) \,\mathrm{d}x \ge \int_\Omega f(v-u)\,\mathrm{d}x \qquad \forall v \in K. \end{cases} \tag{3.16}$$

Beweis. Nach den Lemmata 3.17 und 3.16 sind die Voraussetzungen von Satz 3.7 erfüllt. Dieser liefert die Behauptung. □

Die so gefunde Lösung u heißt wie auch im Differentialgleichungsfall **schwache Lösung**. Da $C_0^\infty(\Omega)$ dicht eingebettet ist in $H_0^1(\Omega)$ kann man die Testfunktionen in (3.16) immer äquivalent auf $v \in C_0^\infty(\Omega) \cap K$ beschränken, siehe [1, Chapter 3]. Im Distributionenkalkül erhält man somit, dass u distributionelle Lösung des das differentiellen **Dirichletproblems**

$$\begin{cases} u \in K, \\ -\Delta u \ge f \qquad \text{in } \Omega. \end{cases}$$

ist.

Sind u und f zusätzlich hinreichend glatt, so ist u auch die klassische Lösung dieses differentiellen Problems. Diese Eigenschaft, dass die schwache Lösung unter gewissen Differenzierbarkeitsbedingungen an die Lösung und die Daten auch die klassische Lösung ist, heißt **Selektivität** des Problems. Umgekehrt ist natürlich die klassische Lösung (falls existent) auch die schwache Lösung, somit ist das Problem **konsistent**.

Die Stabilität bezüglich der rechten Seite ist klar nach Satz 3.9. Wir wollen nun die Stabilität bezüglich der Menge K bzw. des Hindernisses g untersuchen. Für ein solches Hindernis $g \in H^1(\Omega)$ mit $g \le 0$ auf $\partial\Omega$ hatten wir

$$K := \left\{ v \in H_0^1 \mid v(x) \ge g(x) \text{ für fast alle } x \in \Omega \right\}.$$

gesetzt. Haben wir jetzt eine Folge von solchen Hindernissen $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben, so setzen wir außerdem

$$K_n := \left\{v \in H_0^1 \mid v(x) \geq g_n(x) \text{ für fast alle } x \in \Omega\right\}.$$

Es stellt sich nun die Frage, wann Konvergenz der Mengen $K_n \xrightarrow{\text{int}} K$ zu beobachten ist.

Lemma 3.20. *Zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 3.19 gelte $g, g_n \in C(\overline{\Omega})$, $n \in \mathbb{N}$, und $g_n \to g$ bezüglich der Supremumsnorm $\|.\|_\infty$. Dann gilt $K_n \xrightarrow{\text{int}} K$.*

Beweis. Für beliebiges $\varepsilon > 0$ sei N so groß, dass $\|g_n - g\|_\infty < \varepsilon$ für $n \geq N$. Sei dann $u \in \limsup_n K_n$, das heißt für unendlich viele $n_k \geq N$, $k \in \mathbb{N}$, gilt

$$u \geq g_{n_k} \quad \text{f.ü. in } \Omega.$$

Dann erhalten wir für fast alle $x \in \Omega$

$$\begin{aligned} u(x) - g(x) &= u(x) - g_{n_k}(x) + g_{n_k}(x) - g(x) \\ &\geq u(x) - g_{n_k}(x) - \|g_{n_k} - g\|_\infty \geq -\varepsilon, \end{aligned}$$

also folgt für $\varepsilon \to 0$ ($N \to +\infty$), dass $u - g \geq 0$ und somit $u \in K$. Damit gilt bereits, da K abgeschlossen und $\liminf_n K_n \subseteq \limsup_n K_n$

$$\overline{\liminf_n K_n} \subseteq \overline{\limsup_n K_n} \subseteq K.$$

Zu zeigen ist noch die Inklusion $K \subseteq \overline{\liminf_n K_n}$. Diese bedeutet, dass zu jedem $u \in K$, also $u \geq g$, eine Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H_0^1(\Omega)$ gefunden werden kann mit $u_n \to u$ bezüglich der $H_0^1(\Omega)$-Norm sowie $u_n \in K_m$ für alle $m \in \mathbb{N}$ groß genug.

Für alle $n \geq 1$ sei dazu $M(n) \in \mathbb{N}$ so groß gewählt, dass $\|g_m - g\|_\infty < n^{-1}$ für alle $m \geq M(n)$. Wir setzen nun

$$u_n(x) := \sup\left(\{u(x)\} \cup \{g_m(x) \mid m \geq M(n)\}\right) < \infty \qquad \forall x \in \Omega$$

(dies ist nur bis auf eine Nullmenge definiert, aber das ist hier zulässig, da wir nur immer nur mit Äquivalenzklassen von Funktionen rechnen). Da die Funktionen g_m aus $H_1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ gewählt sind mit $g_m \leq 0$ auf $\partial\Omega$ und $u \in H_0^1(\Omega)$, folgt $u_n \in H_0^1(\Omega)$ und $u_n \in K_m$ für alle $m \geq M(n)$. Damit ist $\{u_n\} \subseteq \liminf_n K_n$. Für fast alle $x \in \Omega$ ist nun wegen $u \geq g$

$$u_n(x) - u(x) = \sup_{m \geq M(n)} g_m(x) - u(x) \leq \sup_{m \geq M(n)} (g_m(x) - g(x)) \leq \frac{1}{n}.$$

Damit gilt bereits $\|u_n - u\|_\infty \to 0$ für $n \to +\infty$, also auch (Ω ist beschränkt)

$$\int_\Omega |u_n - u|^2 \, \mathrm{d}x \leq c\,\|u_n - u\|_\infty^2 \longrightarrow 0$$

mit einer nur von Ω abhängigen Konstante c. Das bedeutet aber $u_n \to u$ in $L^2(\Omega)$ und wegen der Poincaré–Friedrichs–Ungleichung auch $u_n \to u$ in $H_0^1(\Omega)$. Also $u \in \overline{\liminf_n K_n}$ und somit

$$K \subseteq \overline{\liminf_n K_n}.$$

Insgesamt haben wir gezeigt:

$$K = \overline{\liminf_n K_n} = \overline{\limsup_n K_n}.$$

Das bedeutet aber $K_n \overset{\text{int}}{\longrightarrow} K$, was zu zeigen war. $\square$

Bemerkung 3.21. Die Stetigkeitsforderung $g, g_n \in C(\overline{\Omega})$, $n \in \mathbb{N}$, ist etwa für ein Gebiet Ω der Dimension $d = 1$ immer erfüllt, denn $H^1(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$. Für höhere Dimensionen müssen die Funktionen g, g_n im Allgemeinen höhere (schwache) Regularität besitzen. Diese ist etwa gegeben, wenn $g, g_n \in H^k(\Omega)$ für $2k > d$, denn dann gilt $H^k(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$. All dies folgt aus den Einbettungssätzen für Sobolevräume, man vergleiche [1, Chapter 4].

Insgesamt erhalten wir:

Satz 3.22 (Stabilität des Hindernisproblems). *Das Hindernisproblem ist stabil bezüglich der rechten Seite f (Störung gemessen in der $H^{-1}(\Omega)$–Norm) und bezüglich der Menge K, also auch bezüglich des Hindernisses g (Störung gemessen in der $\|.\|_\infty$-Norm).*

Beweis. Die Stabilität des Problems bezüglich der rechten Seite f folgt sofort aus Satz 3.9. Satz 3.14 zusammen mit Lemma 3.20 liefert die Stabilität bezüglich der Menge K und damit bezüglich des Hindernisses. $\square$

Damit haben wir die Wohlgestelltheit des elastischen Hindernisproblems vollständig gezeigt.

4 Nichtlineare Variationsungleichungen

Wir wollen nun eine Erweiterung der bisher entwickelten Theorie auf nichtlineare Operatoren betrachten. Wir werden aber nicht allgemeine Operatoren zulassen, sondern uns auf einen wichtigen Spezialfall, den der Potentialoperatoren, beschränken. Dazu benötigen wir zunächst einige Resultate über diese wichtige Klasse von Operatoren. Danach zeigen wir die Lösbarkeit gewisser Inklusionsprobleme und stellen die Verbindung zu (nichtlinearen) Variationsungleichungen her. Schließlich beweisen wir ein einfaches Eindeutigkeitsresultat.

4.1 Mengenwertige Abbildungen und Potentiale

Sei V ein reflexiver[6] Banachraum mit Norm $\|.\|$ und Dualraum V^*. Die duale Paarung zwischen V^* und V schreiben wir wieder als $\langle .,. \rangle$. Ein (im Allgemeinen nichtlinearer) mengenwertiger Operator $A : V \to \mathcal{P}(V^*)$, $\mathcal{P}(V^*)$ die Potenzmenge von V^*, ist eine Abbildung, die jedem $u \in V$ eine Menge $A(u) \subseteq V^*$ zuordnet. Wir schreiben dafür kürzer $A : V \rightrightarrows V^*$. Viele Konzepte von Operatoren von V nach V^* lassen sich übertragen.

Definition 4.1. *Ein mengenwertiger Operator $A : V \rightrightarrows V^*$ heißt **monoton**, falls für alle $u_1, u_2 \in V$ gilt:*

$$\langle f_2 - f_1, u_2 - u_1 \rangle \geq 0 \qquad \forall f_1 \in A(u_1), f_2 \in A(u_2).$$

Monotonie im Sinne der vorangehenden Definition ist eine Erweiterung monoton wachsender reeller Funktionen, siehe auch Beispiel 4.4. Die für uns interessante Klasse von mengenwertigen Operatoren lässt sich nun in gewissem Sinne als verallgemeinertes Differential einer Stammfunktion schreiben:

Definition 4.2. *Ein Funktional $\Phi : V \to [-\infty, +\infty]$, das nicht identisch $+\infty$ ist und den Wert $-\infty$ nicht annimt, heißt **Potential**. Das Potential Φ heißt **konvex**, falls der **Epigraph***

$$\operatorname{epi} \Phi := \{(u, x) \in V \times \mathbb{R} \mid x \geq \Phi(u)\}$$

von Φ in $V \times \mathbb{R}$ konvex ist oder äquivalent

$$\Phi(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda \Phi(u) + (1-\lambda)\Phi(v) \qquad \forall u, v \in V,\ \lambda \in [0,1].$$

Die Äquivalenz ist leicht zu sehen, einen detaillierten Beweis findet man zusammen mit weiteren Eigenschaften des Epigraphs in [11, Proposition 47.3].

Definition 4.3. *Für ein konvexes Potential ist das **Subdifferential** $\partial\Phi(u) \subseteq V^*$ im Punkt $u \in V$ erklärt als*

$$\partial\Phi(u) := \{f \in V^* \mid \Phi(u) + \langle f, v - u \rangle \leq \Phi(v)\ \forall v \in V\}.$$

[6] Ein Banachraum V heißt reflexiv, falls es zu jedem $f \in V^{**}$ aus dem Bidualraum $V^{**} = (V^*)^*$ ein $j(f) \in V$ gibt, so dass $\langle f, h \rangle_{V^{**} \times V^*} = \langle h, j(f) \rangle_{V^* \times V}$ für alle $h \in V^*$ und $j : V^{**} \to V$ ein isometrischer Isomorphismus ist. Dann kann V^{**} mit V identifiziert werden: $V^{**} \cong V$. Alle Hilberträume sowie $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, und die korrespondierenden Sobolevräume sind reflexiv, nicht jedoch $L^1(\Omega)$ und $L^\infty(\Omega)$, siehe [14, Section 2.8] für Details.

*Ein mengenwertiger Operator $A : V \rightrightarrows V^*$ heißt **Potentialoperator**, falls $A = \partial\Phi$ für ein konvexes Potential $\Phi : V \to [-\infty, +\infty]$.*

Beispiel 4.4 (Reelle Abbildungen). Sei $V = V^* = \mathbb{R}$ mit der gewöhnlichen Multiplikation als duales Produkt. Wir betrachten das Potential $\Phi : \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty]$ mit

$$\Phi(u) := \begin{cases} 0 & \text{für } u \in (-\infty, 1/2) \\ u - 1/2 & \text{für } u \in [1/2, +\infty), \end{cases}$$

siehe Abbildung 3 (links). Das Subdifferential $A(u) := \partial\Phi(u)$ von Φ im Punkt u ist die Menge aller $f \in \mathbb{R}$, so dass die Gerade mit Steigung f durch den Punkt $(u, \Phi(u))$ vollständig unterhalb des Graphen von Φ liegt. Also ist $A : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ gegeben durch

$$A(u) := \begin{cases} \{0\} & \text{für } u \in (-\infty, 1/2) \\ [0, 1] & \text{für } u = 1/2 \\ \{1\} & \text{für } u \in (1/2, +\infty). \end{cases}$$

Außerdem ist A monoton im Sinne von Definition 4.1, siehe Abbildung 3 (rechts).

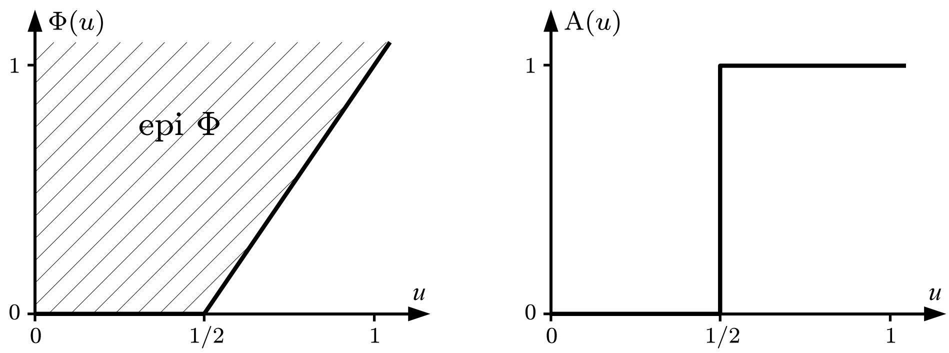

Abbildung 3: Konvexes Potential Φ und monotoner Potentialoperator $A = \partial\Phi$

Das Subdifferential sollte eine Erweiterung des üblichen Differentialbegriffs für Funktionale sein. Dies wird durch das folgende Lemma 4.6 bestätigt, falls das Funktional Φ Gâteaux–differenzierbar (oder Fréchet–differenzierbar) und konvex ist.

Definition 4.5. *Ein Funktional $\Phi : V \to \mathbb{R}$ heißt **Gâteaux–differenzierbar**, falls*

$$\mathrm{D}\Phi(u, v) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\Phi(u + \varepsilon v) - \Phi(u)}{\varepsilon}$$

*für alle $u, v \in V$ existiert und $\mathrm{D}\Phi(u, .) : V \to \mathbb{R}$ für alle $u \in V$ linear und stetig ist, also $\mathrm{D}\Phi(u, .) \in V^*$. Für Gâteaux–differenzierbares Φ heißt die Abbildung $\Phi' : V \to V^*$ mit $\Phi'(u) := \mathrm{D}\Phi(u, .)$, $u \in V$, **Gâteaux-Ableitung** von Φ.*

Ist V endlichdimensional und Φ (im klassischen Sinne) partiell differenzierbar, so ist der Gradient auch die Gâteaux-Ableitung. Man beachte, dass Φ nicht total differenzierbar zu sein braucht.

Lemma 4.6. *Sei $\Phi : V \to \mathbb{R}$ konvex und Gâteaux–differenzierbar. Dann gilt*

$$\partial\Phi(u) = \{\Phi'(u)\}.$$

Beweis. Aus der Konvexität von Φ folgt

$$\begin{aligned}\Phi(u) + \langle \Phi'(u), v - u\rangle &= \Phi(u) + \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{\Phi(u + \varepsilon(v-u)) - \Phi(u)}{\varepsilon} \\ &\leq \Phi(u) + \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{(1-\varepsilon-1)\Phi(u) + \varepsilon\Phi(v)}{\varepsilon} \leq \Phi(v) \qquad \forall u, v \in V,\end{aligned}$$

also $\Phi'(u) \in \partial\Phi$.

Für beliebiges $f \in \partial\Phi$ gilt nach Definition $\Phi(v) - \Phi(u) \geq \langle f, v-u\rangle$. Setzt man $v = u \pm \varepsilon w$, $w \in V$, $\varepsilon > 0$, und dividiert durch ε, so erhält man

$$\frac{\Phi(u \pm \varepsilon w) - \Phi(u)}{\varepsilon} \geq \langle f, \pm w\rangle.$$

Für $\varepsilon \downarrow 0$ konvergiert die linke Seite gegen $\langle \Phi'(u), \pm w\rangle$ und wir erhalten die Ungleichung $\langle \Phi'(u), \pm w\rangle \geq \langle f, \pm w\rangle$. Sofort folgt $\langle \Phi'(u), w\rangle = \langle f, w\rangle$ für alle $w \in V$, also $f = \Phi'(u)$. ☐

Lemma 4.7 (Eigenschaften von $\partial\Phi$). *Sei $A : V \rightrightarrows V^*$ ein Potentialoperator, das heißt $A = \partial\Phi$ für ein konvexes Potential $\Phi : V \to [-\infty, +\infty]$. Dann gilt*

(i) Für alle $u \in V$ ist $A(u) \subseteq V^*$ abgeschlossen und konvex, also auch schwach abgeschlossen.

(ii) Ist $\Phi(u) \neq +\infty$ und Φ in u stetig, so ist $A(u) \neq \emptyset$.

(iii) A ist monoton.

Beweis. Zu (i): Sei $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A(u)$ eine Folge mit $f_n \to f \in V^*$ für $n \to \infty$. Dann folgt

$$\Phi(u) + \langle f, v-u\rangle = \lim_{n\to\infty} (\Phi(u) + \langle f_n, v-u\rangle) \leq \Phi(v),$$

also ist $A(u)$ abgeschlossen. Für $f, g \in A(u)$ und $\lambda \in [0,1]$ gilt weiter

$$\begin{aligned}\Phi(u) + \langle \lambda f + (1-\lambda)g, v-u\rangle &= \lambda\left(\Phi(u) + \langle f, v-u\rangle\right) + (1-\lambda)\left(\Phi(u) + \langle g, v-u\rangle\right) \\ &\leq (\lambda + 1 - \lambda)\Phi(v) = \Phi(v),\end{aligned}$$

also ist $A(u)$ auch konvex. Aus (starker) Abgeschlossenheit und Konvexität folgt bereits die schwache Abgeschlossenheit von $A(u)$, siehe etwa [14, Corollary 2.8.7].

Zu (ii): Der Produktraum $V \times \mathbb{R}$ ist mit der Norm $\|(u,x)\| := \|u\| + |x|$ wieder ein Banachraum. Weil $(u_n, x_n) \to (u, x)$ genau dann, wenn $u_n \to u$ und $x_n \to x$, und $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}$, können wir außerdem den Dualraum $(V \times \mathbb{R})^*$ mit $V^* \times \mathbb{R}$ identifizieren. Das duale Produkt ist dann gegeben durch

$$\langle (f, a), (v, x)\rangle = \langle f, v\rangle + ax, \qquad v \in V, f \in V^*, \, a, x \in \mathbb{R}.$$

Der Epigraph $\operatorname{epi}\Phi = \{(u,x) \in V \times \mathbb{R} \mid x \geq \Phi(u)\}$ von Φ ist in $V \times \mathbb{R}$ konvex und das Innere $\operatorname{int}\operatorname{epi}\Phi$ ist nichtleer, da $\Phi(u) \neq +\infty$ und Φ in u stetig ist. Damit kann der Punkt

$(u, \Phi(u))$ nach dem Satz von Hahn–Banach über die Separation von konvexen Mengen[7] von $\operatorname{epi}\Phi$ getrennt werden. Das heißt, es gibt ein stetiges, lineares Funktional $(f, a) \in (V \times \mathbb{R})^*$, also $f \in V^*$, $a \in \mathbb{R}$ mit $(f, a) \neq 0$ und

$$\langle f, v\rangle + ax = \langle (f, a), (v, x)\rangle \leq 1 \leq \langle (f, a), (u, \Phi(u))\rangle = \langle f, u\rangle + a\Phi(u) \tag{4.1}$$

für alle $(v, x) \in \operatorname{epi}\Phi$. Setzt man $(v, x) = (u, \Phi(u) + 1) \in \operatorname{epi}\Phi$, so liefert diese Gleichung zunächst $a \leq 0$. Wäre nun $a = 0$, so ergäbe (4.1), dass $\langle f, v - u\rangle \leq 0$. Da aber $\Phi(u) \neq +\infty$ und dies wegen der Stetigkeit von Φ in u auch in einer kleinen Kugel um u gilt, können wir mit v aus einer kleinen Kugel um u testen und erhielten so $f = 0$ im Widerspruch zu $(f, a) \neq 0$.

Dividiert man nun (4.1) für beliebiges $v \in V$ durch $-a > 0$ und wählt $x = \Phi(v)$, so erhält man mit $g := -a^{-1}f \in V^*$ aus (4.1)

$$\langle g, v\rangle - \Phi(v) \leq \langle g, u\rangle - \Phi(u).$$

Damit ist $\Phi(u) + \langle g, v - u\rangle \leq \Phi(v)$, also $g \in \partial\Phi(u)$.

Zu (iii): Für $u_1, u_2 \in V$ gilt nach Definition von $\partial\Phi$ mit $v = u_2$ bzw. $v = u_1$:

$$\begin{aligned} &\langle f_1, u_1 - u_2\rangle \geq \Phi(u_1) - \Phi(u_2), \\ &\langle f_2, u_1 - u_2\rangle \leq \Phi(u_1) - \Phi(u_2) \qquad \forall f_1 \in A(u_1), f_2 \in A(u_2) \end{aligned}$$

Subtraktion liefert

$$\langle f_1 - f_2, u_1 - u_2\rangle \geq 0 \qquad \forall f_1 \in A(u_1), f_2 \in A(u_2).$$

Dies ist die Monotonie von A. □

Punkt (iii) des vorangehenden Lemmas verallgemeinert den Sachverhalt, dass eine reelle, stetig differenzierbare, konvexe Funktion eine monoton wachsende Ableitung hat.

In konkreten Variationsungleichungen treten üblicherweise zwei Typen von Potentialen auf: Einerseits Potentiale von den funktionalen Zusammenhang definierenden Potentialoperatoren und andererseits Potentiale, die (konvexe) Mengen von zulässigen Lösungsfunktionen festlegen, also Nebenbedingugen an die Lösung beschreiben (man vergleiche mit dem Hindernisproblem). Grundlegend ist daher die folgende Definition.

Definition 4.8. *Sei $K \subseteq V$ eine nichtleere, abgeschlossene und konvexe Menge. Dann heißt*

$$I_K(u) := \begin{cases} 0 & \textit{für } u \in K \\ +\infty & \textit{für } u \notin K \end{cases} \tag{4.2}$$

***Indikatorfunktion** von K. Es gilt*

$$\partial I_K(u) = \begin{cases} \{f \in V^* \mid \langle f, v - u\rangle \leq 0 \ \ \forall v \in K\} & \textit{für } u \in K \\ \emptyset & \textit{für } u \notin K\ . \end{cases}$$

*Die Menge $N_K(u) := \partial I_K(u) \subseteq V^*$ heißt **Normalkegel** zu K an u.*

[7] Hier benötigen wir folgende Version: Sei $K \subseteq X$ mit $\int K \neq \emptyset$ eine konvexe Teilmenge des reellen normierten Raumes X und $x_0 \notin \int K$. Dann gibt es ein lineares, stetiges Funktional $f : X \to \mathbb{R}$ mit $f(y) \leq 1$ für alle $y \in K$ und $f(x_0) \geq 1$, siehe hierzu [11, Proposition 39.4 (i)].

Beweis. Gemäß Definition haben wir

$$\partial I_K(u) = \{f \in V^* \mid I_K(u) + \langle f, v - u \rangle \leq I_K(v) \ \ \forall v \in V\}.$$

Da wegen $I_K(v) = +\infty$ für $v \notin K$ die definierende Gleichung trivialerweise erfüllt ist und außerdem $I_K \equiv 0$ auf K, folgt die Behauptung. □

4.2 Lösbarkeit und Eindeutigkeit

Wir hatten schon in Abschnitt 2.1 gesehen, dass bei unbeschränktem K nicht unbedingt eine Lösung existieren muss, wenn Φ nicht zusätzliche Eigenschaften besitzt. Die entscheidende ist hier die Koerzitivität:

Definition 4.9. *Ein Funktional $\Phi : V \to [-\infty, +\infty]$ heißt **koerzitiv**, falls*

$$\lim_{\|u\| \to \infty} \frac{\Phi(u)}{\|u\|} = +\infty.$$

Man vergleiche hierzu die Definition für Koerzitivität von Operatoren aus (3.4).

Eine (in den Anwendungen unbedingt nötige) Abschwächung der Stetigkeitsforderung an Φ ist wie folgt gegeben:

Definition 4.10. *Ein Funktional $\Phi : V \to [-\infty, +\infty]$ heißt **(stark) unterhalbstetig**, falls für alle $u \in V$ und alle Folgen $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $u_n \to u$*

$$\Phi(u) \leq \liminf_{n \to \infty} \Phi(u_n).$$

*Gilt dies bereits für $u_n \rightharpoonup u$ (schwach), so heißt Φ **schwach unterhalbstetig**.*

In Abbildung 4 sind Koerzitivität und Unterhalbstetigkeit im endlichdimensionalen Fall veranschaulicht.

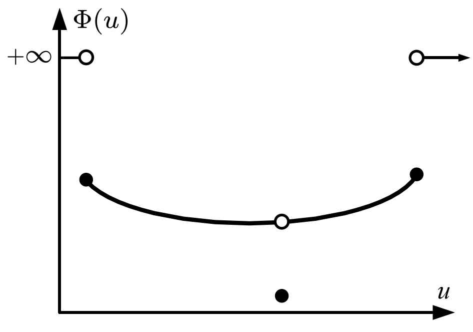

Abbildung 4: Unterhalbstetiges (nicht stetiges), koerzitives Potential Φ

Aus schwacher Unterhalbstetigkeit folgt die (starke) Unterhalbstetigkeit. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht, wir haben jedoch:

Lemma 4.11. *Ist $\Phi : V \to [-\infty, +\infty]$ unterhalbstetig und konvex, so ist Φ auch schwach unterhalbstetig.*

Beweis. (Schwache) Unterhalbstetigkeit ist äquivalent dazu, dass der Epigraph $\operatorname{epi}\Phi$ von Φ (schwach) abgeschlossen ist. Außerdem ist Φ konvex. Da konvexe, abgeschlossene Mengen auch schwach abgeschlossen sind (siehe [14, Corollary 2.8.7]), folgt die Behauptung. $\square$

Die Indikatorfunktion I_K aus (4.2) ist unterhalbstetig und konvex, da K abgeschlossen und konvex ist.

Wir kommen nun zum Hauptsatz dieses Abschnitts, der uns die Lösbarkeit gewisser Inklusionen mit mengenwertigen Potentialoperatoren zeigt. Im Anschluss werden wir den Zusammenhang zu Variationsungleichungen herstellen.

Satz 4.12 (Lösbarkeit). *Sei $\Phi := \Phi_1 + \Phi_2 : V \to [-\infty, +\infty]$ ein koerzitives Funktional, wobei $\Phi_1 : V \to [-\infty, +\infty]$ ein konvexes, unterhalbstetiges Potential und $\Phi_2 : V \to \mathbb{R}$ ein schwach unterhalbstetiges, Gâteaux–differenzierbares Funktional sei. Mit $A_1 := \partial\Phi_1$ und $A_2 := \Phi_2'$ gibt es dann zu jedem $f \in V^*$ mindestens ein $u \in V$, welches der Inklusion*

$$A_1(u) + A_2(u) \ni f \tag{4.3}$$

genügt.

Beweis. Sei $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$ eine Minimierungsfolge für $v \mapsto \Phi(v) - \langle f, v\rangle$, das heißt

$$\lim_{n\to\infty} (\Phi(u_n) - \langle f, u_n\rangle) = \inf_{v\in V} (\Phi(v) - \langle f, v\rangle).$$

Eine solche existiert nach Definition des Infimums. Nun ist $\Phi - f$ schwach koerzitiv, das heißt

$$\lim_{\|v\|\to\infty} (\Phi(v) - \langle f, v\rangle) \geq \lim_{\|v\|\to\infty} (\Phi(v) - \|f\|_* \|v\|) \geq \lim_{\|v\|\to\infty} \left(\frac{\Phi(v)}{\|v\|} - \|f\|_*\right) \|v\| = +\infty.$$

Dabei haben wir die Koerzitivität von Φ verwendet. Damit ist $\{u_n\}$ beschränkt (sonst $\Phi(u_n) \to \infty$), also gibt es eine Teilfolge, wieder mit $\{u_n\}$ bezeichnet, so dass $u_n \rightharpoonup u \in V$. Wegen der schwachen Unterhalbstetigkeit von $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ (Lemma 4.11) ist

$$\Phi(u) - \langle f, v\rangle \leq \liminf_{n\to\infty} (\Phi(u_n) - \langle f, v\rangle) = \inf_{v\in V} (\Phi(v) - \langle f, v\rangle),$$

also $\Phi(u) - \langle f, v\rangle = \inf_{v\in V} (\Phi(v) - \langle f, v\rangle)$.

Sei nun angenommen, dass u der Inklusion $A_1(u) + A_2(u) \ni f$ nicht genügt, das heißt

$$\partial\Phi_1(u) \not\ni f - \Phi_2'(u).$$

Nach der Definition des Subdifferentials bedeutet dies, dass ein $v \in V$ existiert mit

$$\Phi_1(u) + \langle f - \Phi_2'(u), v - u\rangle > \Phi_1(v). \tag{4.4}$$

Wir zeigen nun, dass es von u in Richtung v ein $\tilde{u}$ gibt mit $\Phi_1(\tilde{u}) - \langle f, \tilde{u}\rangle < \Phi_1(u) - \langle f, u\rangle$ und somit u kein Minimum von $v \mapsto \Phi(v) - \langle f, v\rangle$ sein kann. Man setze hierzu $v_\varepsilon := u + \varepsilon(v-u)$ für $\varepsilon \in [0,1]$. Zunächst ist die reelle Funktion $\gamma : (0,1] \to \mathbb{R}$,

$$\gamma(\varepsilon) := \frac{\Phi_1(v_\varepsilon) - \Phi_1(u)}{\varepsilon}, \qquad \varepsilon \in (0,1],$$

wachsend in ε. Für $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in (0,1]$ mit $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ aber $\gamma(\varepsilon_1) > \gamma(\varepsilon_2)$ läge nämlich in $V \times \mathbb{R}$ die Gerade durch $(u, \Phi_1(u))$ und $(v_{\varepsilon_1}, \Phi_1(v_{\varepsilon_1}))$ in v_{ε_1} echt oberhalb der Geraden durch $(u, \Phi_1(u))$ und $(v_{\varepsilon_2}, \Phi_1(v_{\varepsilon_2}))$. Dies zusammen mit $(u_{\varepsilon_1}, \Phi_1(v_{\varepsilon_1})) \in \partial \operatorname{epi} \Phi_1$ widerspricht aber der Konvexität von $\operatorname{epi} \Phi_1$.

Damit existiert die Richtungsableitung $\mathrm{D}\Phi_1(u, v-u) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \gamma(\varepsilon) \in [-\infty, +\infty]$ von Φ_1 bei $u \in V$ in Richtung $v - u \in V$. Sie ist sogar endlich:

$$\begin{aligned} \mathrm{D}\Phi_1(u, v-u) &:= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\Phi_1(v_\varepsilon) - \Phi_1(u)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\Phi_1((1-\varepsilon)u + \varepsilon v) - \Phi_1(u)}{\varepsilon} \\ &\leq \Phi_1(v) - \Phi_1(u) < +\infty \end{aligned} \tag{4.5}$$

und auch $\mathrm{D}\Phi_1(u, v-u) \geq -\mathrm{D}\Phi_1(u, u-v) > -\infty$. Aus dieser Überlegung und aus der Definition der Gâteaux-Ableitung folgt unter Verwendung des Landau–Symbols[8] $o(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} \Phi_1(v_\varepsilon) &= \Phi_1(u) + \varepsilon \mathrm{D}\Phi_1(u, v-u) + o(\varepsilon) \quad &(\text{für } \varepsilon \downarrow 0), \\ \Phi_2(v_\varepsilon) &= \Phi_2(u) + \varepsilon \langle \Phi_2'(u), v-u\rangle + o(\varepsilon) \quad &(\text{für } \varepsilon \downarrow 0). \end{aligned}$$

Hieraus folgt mit (4.5)

$$\begin{aligned} &\Phi_1(v_\varepsilon) + \Phi_2(v_\varepsilon) - \langle f, v_\varepsilon\rangle \\ &\quad = \Phi_1(u) + \Phi_2(u) - \langle f, u\rangle + \varepsilon \left(\mathrm{D}\Phi_1(u, v-u) + \langle \Phi_2'(u), v-u\rangle - \langle f, v-u\rangle\right) + o(\varepsilon) \\ &\quad \leq \Phi_1(u) + \Phi_2(u) - \langle f, u\rangle + \varepsilon \left(\Phi_1(v) - \Phi_1(u) + \langle \Phi_2'(u) - f, v-u\rangle\right) + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

Wegen (4.4) ist der Ausdruck in der letzten Klammer negativ. Außerdem dominiert dieser Term für hinreichend kleines ε den $o(\varepsilon)$–Term und es folgt die Existenz eines $v_\varepsilon \in V$, bei dem $\Phi - f = \Phi_1 + \Phi_2 - f$ kleiner ist als bei u, was aber der Minimalität von u widerspricht. □

Den ersten Schritt, also das Finden einer (schwach konvergenten) Minimierungsfolge nennt man auch die *direkte Methode der Variationsrechnung*.

Die Inklusion (4.3) bedeutet nichts anderes als $\partial\Phi_1(u) \ni f - A_2(u)$. Wenn wir das mit der Definition des Subdifferentials umschreiben, erhalten wir die Variationsungleichung

$$\begin{cases} u \in V, \\ \Phi_1(v) + \langle A_2(u), v-u\rangle \geq \Phi_1(u) + \langle f, v-u\rangle \qquad \forall v \in V. \end{cases}$$

Ist weiterhin $\Phi_1 = \Phi_0 + I_K$ mit der Indikatorfunktion I_K aus (4.2) zu $K \subseteq V$ nichtleer, abgeschlossen und konvex, sowie $\Phi_0 : V \to \mathbb{R}$ ein konvexes und unterhalbstetiges Potential, so erhalten wir mit $A := A_2$ das Problem

$$\begin{cases} u \in K, \\ \Phi_0(v) + \langle A(u), v-u\rangle \geq \Phi_0(u) + \langle f, v-u\rangle \qquad \forall v \in K. \end{cases}$$

[8] Zur Erinnerung: Das Landau–Symbol $o(\varepsilon)$ steht für eine Funktion $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon^{-1} g(\varepsilon) = 0$, vergleiche [10, Abschnitt 2.20].

Dies folgt direkt aus der Definition von I_K.

Ist der Operator A durch eine *lineare*, stetige und stark positive Bilinearform $a(.,.)$ mittels $a(v,w) := \langle Av, w\rangle$, $v, w \in K$, definiert, so nennt man

$$\begin{cases} u \in K, \\ \Phi_0(v) + a(u, v-u) \geq \Phi_0(u) + \langle f, v-u\rangle \qquad \forall v \in K. \end{cases} \tag{4.6}$$

auch **lineare Variationsungleichungen zweiter Art**.

Haben wir schließlich $\Phi_0 = 0$, so schreibt man für (4.6) auch

$$f - A(u) \ni N_K(u)$$

mit dem Normalkegel N_K von K.

Für allgemeine Potentiale Φ ist es nicht immer möglich, Eindeutigkeit einer Lösung zu zeigen. Es gilt aber als wichtiger Spezialfall:

Satz 4.13 (Eindeutigkeit). *Die Lösung u der linearen Variationsungleichung zweiter Art* (4.6) *ist eindeutig.*

Beweis. Weil Φ_0 ein Potential ist, gibt es ein $v_0 \in V$ mit $\Phi_0(v_0) < +\infty$. Dann ist wegen (4.6) (wir dürfen mit allen $v \in V$ testen) auch

$$\Phi_0(u) \leq \Phi_0(v_0) + a(u, v_0 - u) - \langle f, v_0 - u\rangle < +\infty \qquad \forall v \in V.$$

Für zwei Lösungen $u_1, u_2 \in K$ des Problems folgt durch Subtraktion der Variationsungleichungen (mit $v = u_2$ bzw. $v = u_1$), dass

$$\begin{aligned} a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) &\leq \Phi_0(u_2) - \Phi_0(u_1) + \langle f, u_1 - u_2\rangle - \Phi_0(u_2) + \Phi_0(u_1) - \langle f, u_1 - u_2\rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

also $u_1 = u_2$ wegen der starken Positivität von $a(.,.)$. $\square$

5 Anmerkungen und Ergänzungen

Das Studium der Variationsungleichungen und der eng verwandten Variationsprobleme mit konvexen Mengen bzw. konvexen Potentialen fällt in das Gebiet der *Variationellen Analysis*. Eine Einführung wird in [4] gegeben, weitergehende Aussagen findet man u.A. in [6] sowie, neben vielen anderen Themen, in [11]. Auch [2, Chapter 11] gibt eine kurze Einführung, wobei hier auch die numerische Approximation kurz angerissen wird.

Das elastische Hindernisproblem findet sich, in unterschiedlicher Tiefe behandelt, in fast jedem Buch zu Variationsungleichungen, siehe etwa [6, Section 2.6], [3, Section 2.3]. Die Monographie [7] widmet sich ganz den Hindernisproblemen.

Aussagen zur Bestapproximation bezüglich einer konvexen Teilmenge eines Hilbertraumes gehören einerseits zur *Approximationstheorie*, in die in [2, Chapter 3] eine Einführung gegeben wird, andererseits zur *Konvexen Analysis*, siehe u.A. [11, Chapter 47]. Satz 3.7 geht auf eine Arbeit von G. STAMPACCHIA [9] zurück. Die Argumentation folgt hier größtenteils [4].

Der hier dargestellte Zugang zur Stabilität der Lösung bezüglich Störungen an der konvexen Menge basiert auf eigenen Überlegungen des Autors, wenngleich sehr ähnliche Aussagen bereits von MOSCO gefunden wurden, siehe hierzu [7, Chapter 4.4]. Dort wird aber eine etwas andere Mengenkonvergenz verwendet.

Nichtlineare Variationsungleichungen werden in [8] behandelt; dort sind auch weitere Verallgemeinerungen, etwa Quasi-Variationsungleichungen, bei denen die Potentiale auch noch von der Lösung abhängen dürfen, dargestellt. Außerdem finden sich dort auch Ergebnisse zu Variationsungleichungen mit Operatoren, die kein Potential besitzen, sowie einige komplexe Anwendungsbeispiele, die auf nichtlineare Variationsungleichungen führen, etwa die Strömung von Flüssigkeiten in porösen Medien oder das Gießen von Stahl.

Fragen der Regularität von Lösungen würden den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Wir verweisen auf [4, Chapter 6].

Literatur

[1] R. ADAMS und J. FOURNIER. *Sobolev Spaces*, Band 140 der Reihe *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, New York – London – Toronto, 2. Auflage, 2003.

[2] K. ATKINSON und W. HAN. *Theoretical Numerical Analysis: A Functional Analysis Framework*, Band 39 der Reihe *Texts in Applied Mathematics*. Springer, Berlin – Heidelberg – New York, 2. Auflage, 2005.

[3] M. CHIPOT. *Variational Inequalities and Flow in Porous Media*, Band 52 der Reihe *Applied Mathematical Sciences*. Springer, Berlin – Heidelberg – New York, 1984.

[4] M. CHIPOT. *Elements of Nonlinear Analysis*. Birkhäuser Advanced Texts. Birkhäuser, Basel – Boston – Berlin, 2000.

[5] E. EMMRICH. *Gewöhnliche und Operator-Differentialgleichungen*. Vieweg, Wiesbaden, 2004.

[6] D. KINDERLEHRER und G. STAMPACCHIA. *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications*. Pure and Applied Mathematics. Academic Press, New York – London – Toronto, 1980.

[7] J.-F. RODRIGUES. *Obstacle Problems in Mathematical Physics*, Band 134 der Reihe *North-Holland Mathematical Studies*. North-Holland, Amsterdam – New York – Oxford, 1987.

[8] T. ROUBÍČEK. *Nonlinear Partial Differential Equations with Applications*, Band 153 der Reihe *International Series of Numerical Mathematics*. Birkhäuser, Basel – Boston – Berlin, 2005.

[9] G. STAMPACCHIA. Formes bilineaires coercitives sur les ensembles convexes. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 258 (1964), 4413–4416.

[10] W. WALTER. *Analysis 2*. Springer, Berlin – Heidelberg – New York, 5. Auflage, 2002.

[11] E. ZEIDLER. *Nonlinear Functional Analysis III: Variational Methods and Optimization*. Springer, Berlin – Heidelberg – New York, 1985.

[12] E. ZEIDLER. *Nonlinear Functional Analysis IV: Applications to Mathematical Physics*. Springer, Berlin – Heidelberg – New York, 1988.

[13] E. ZEIDLER. *Applied Functional Analysis: Applications to Mathematical Physics*, Band 108 der Reihe *Applied Mathematical Sciences*. Springer, Berlin – Heidelberg – New York, 1995.

[14] E. ZEIDLER. *Applied Functional Analysis: Main Principles and Their Applications*, Band 109 der Reihe *Applied Mathematical Sciences*. Springer, Berlin – Heidelberg – New York, 1995.