Bachelorarbeit

Der Fixpunktsatz von Schauder

vorgelegt von:

Jan Frederik Sundermeier

angefertigt im Seminar:

Angewandte Analysis

Belegnummer: 240096

betreut von:

Prof. Dr. E. Emmrich

Fakultät für Mathematik

Universität Bielefeld

25. August 2010

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

In der Mathematik, besonders beim Lösen von Gleichungen jeglicher Art, ist die Frage nach der Existenz von Lösungen grundlegend. Dabei lassen sich zum Beispiel Integral– und Differentialgleichungen, aber auch algebraische Gleichungen, in der allgemeinen Form

$$x = Ax \tag{1.1}$$

schreiben. In diesem Fall ist A ein Operator[1], der jedem Element x der Definitionsmenge M ein in M liegendes Bildelement Ax zuordnet. Kann zum Lösen der Gleichung (1.1) eine allgemeine Theorie entwickelt werden, so können unterschiedlichste mathematische Problem auf die gleiche Weise gelöst werden.

Die Gleichung (1.1) stellt ein Fixpunktproblem dar. Dabei werden jene Punkte als Fixpunkte bezeichnet, die unter dem Operator A invariant bleiben. Dadurch kann die Frage nach Lösungen der Gleichung auf die Frage nach der Existenz von Fixpunkten reduziert werden.

Zum Lösen von Fixpunktproblemen in endlichdimensionalen Räumen ist der Brouwersche Fixpunktsatz hilfreich. Sollen jedoch Aussagen in unendlichdimensionalen, normierten Räumen getroffen werden, so gilt der Brouwersche Fixpunktsatz nicht. Der Schaudersche Fixpunktsatz hingegen, der den Kern der folgenden Bacherlorarbeit bildet, liefert auch Fixpunktaussagen für unendlichdimensionale Räume und damit Lösungen für unsere Ausgangsgleichung (1.1).

Um den Schauderschen Fixpunktsatz beweisen zu können, müssen grundlegende Definitionen gegeben und vor allem der Begriff der Kompaktheit von Mengen und Operatoren eingeführt werden. Da das Ziel dieser Arbeit der Beweis des Schauderschen Fixpunktsatzes ist, werden zu Beginn der Arbeit eben diese Definitionen und damit verbundenen Sätze dargestellt. Dabei wird teilweise auf einen expliziten Beweis verzichtet, da dieses den Umfang der Arbeit zu stark vergrößern würde. Auf Grund der enormen Bedeutung für die Anwendung des Schauderschen Fixpunktsatzes wird in besonderem Maß auf die Charakterisierung von kompakten Operatoren eingegangen. Im Anschluss an den Beweis wird schließlich ein Teil des Anwendungsspektrums des Schauderschen Fixpunktsatzes anhand von nichtlinearen Integralgleichungen und dem Prinzip von Leray–Schauder aufgezeigt.

[1] In dieser Arbeit wird der allgemeinen Konvention gefolgt und Ax anstatt $A(x)$ für lineare Operatoren geschrieben. Auch bei nichtlinearen Operatoren wird diese Schreibweise beibehalten.

2 Hinführung zum Schauderschen Fixpunktsatz

Der Beweis des Schauderschen Fixpunktsatzes erfordert einige Kenntnisse über grundlegende Definitionen der linearen und auch nichtlinearen Funktionalanalysis, die in dem folgenden Kapitel dem Beweis vorangestellt werden. Soweit nicht anders erwähnt, behandeln wir zunächst den linearen Fall.
Bevor jedoch das Grundlagenkapitel beginnt, werden wir eine Formulierung des Schauderschen Fixpunktsatzes betrachten, um die folgenden Definitionen und Sätze besser einordnen zu können. Der polnische Mathematiker Juliusz Pawel Schauder bewies:
Ist M eine konvexe, kompakte und nichtleere Teilmenge eine Banachraumes X und ist $A : M \to M$ stetig, so besitzt A wenigstens einen Fixpunkt $\widehat{x}$ in M.

2.1 Grundlegende Definitionen

Der grundlegende Raum, auf dem der Schaudersche Fixpunktsatz formuliert wird, ist ein Banachraum.

Definition 2.1 (Banachraum) *Ein normierter, linearer Raum X mit Norm $\|\cdot\|$ heißt Banachraum, falls jede Cauchyfolge bezüglich der Norm gegen ein $x \in X$ in dieser Norm konvergiert.*

Darüber hinaus müssen die Begriffe Konvexität, Kompaktheit und Beschränktheit von Mengen definiert werden. In den folgenden Definitionen und Lemmata ist, falls nicht anders erwähnt, X ein linearer Raum. Die Menge M ist immer eine Teilmenge von X.
Im linearen Raum spricht man von einer konvexen Menge, wenn zu zwei Punkten der Menge deren Verbindungstrecke in der Menge enthalten ist. Dieses lässt sich als Definition folgendermaßen formulieren:

Definition 2.2 (Konvexe Menge) *Eine Teilmenge M eines linearen Raumes X heißt konvex, falls aus $x, y \in M$ und $0 \leq \lambda \leq 1$ stets $x + \lambda(y - x) = (1 - \lambda)x + \lambda y \in M$ folgt.*

Beispiele für konvexe Mengen sind die abgeschlossene Kugel $\overline{B}_X(x;r)$ und die offene Kugel $B_X(x;r)$ um x mit dem Radius r.
Ausgehend von der Konvexität einer Menge kann die konvexe Hülle definiert werden.

Definition 2.3 (Konvexe Hülle) *Sei X einen linearer Raum und $M \subseteq X$, so nennt man die Menge*

$$\operatorname{conv}(M) := \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k : x_k \in X; \lambda_k \in [0,1]; \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1; n \in \mathbb{N} \right\} \tag{2.1}$$

die konvexe Hülle von M.

Anschaulich entspricht der konvexen Hülle einer Menge M die kleinste konvexe Obermenge, die M enthält. Es folgt, dass für zwei Punkte die konvexe Hülle gerade der Verbindungstrecke der Punkte entspricht. Man spricht von einer konvexen Hülle endlich vieler Punkte in M, als dem kleinsten konvexen Polyeder, der die endlich vielen Punkte aus M enthält. Für spätere Beweise sind folgende Bemerkungen wichtig:

- Durch Induktion kann gezeigt werden, dass $\operatorname{conv}(M)$ in M enthalten ist, falls M konvex ist.
- Die konvexe Hülle von M ist die kleinste konvexe Obermenge von M.
- Resultierend gilt $\operatorname{conv}(M) = M$, falls M konvex.

Die kleinste abgeschlossene konvexe Obermenge einer Menge $M \subseteq X$ wird als abgeschlossene konvexe Hülle $\overline{\operatorname{conv}}(M)$ bezeichnet. Dabei merken wir an, dass die konvexe Hülle einer abgeschlossenen Menge M nicht zwangsläufig abgeschlossen ist. Betrachten wir zum Beispiel die abgeschlossene Menge $L := \{(x,y) \| x \in \mathbb{R}, y = 1/1 + x^2\} \subset \mathbb{R}^2$. Die konvexe Hülle dieser Menge ist $\operatorname{conv}(L) = \{(x,y) \| 0 < y < 1\} \bigcup \{(0,1)\}$. Diese ist aber offensichtlich nicht abgeschlossen. Darüber hinaus kann gezeigt werden, dass der Abschluss der konvexen Hülle immer der abgeschlossenen konvexen Hülle entspricht.
Ist aber eine Menge abgeschlossen und konvex, so gilt $\overline{\operatorname{conv}} M = M$.

Neben der Konvexität kommt dem Begriff der Kompaktheit eine besondere Bedeutung zu. Zunächst werden kompakte und relativ kompakte Mengen definiert. Im Anschluss daran werden wir fundamentale Lemmata zur Klassifikation von kompakten Mengen beweisen.
In der folgenden Definition von Kompaktheit spielt der Begriff der Überdeckung eine bedeutende Rolle.

Definition 2.4 (Offene Überdeckung) *Sei X ein linearer Raum. Eine Überdeckung von $M \subseteq X$ ist eine Familie $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ von Mengen $U_\alpha \subseteq X$ mit*

$$M \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha; \tag{2.2}$$

hierbei ist I eine beliebige Indexmenge. Die Überdeckung heißt offen, falls alle Mengen U_α offene Mengen in X sind.

Definition 2.5 (kompakt) *Eine Menge $M \subseteq X$ heißt kompakt, falls man aus jeder offenen Überdeckung $(U_\alpha : \alpha \in I)$ von M eine endliche Teilüberdeckung auswählen kann; d. h. es gilt bereits*

$$M \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} U_{\alpha_j} \tag{2.3}$$

für geeignete Indizes $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in I$.

Definition 2.6 (relativ kompakt) *Eine Teilmenge $M \subseteq X$ eines linearen Raumes X heißt relativ kompakt, falls ihr Abschluss $\overline{M}$ kompakt ist.*

Es sei nochmals betont, dass in den folgenden Lemmata X stets ein linearer Raum ist.

Lemma 2.1 *Eine Menge $M \subseteq X$ ist genau dann kompakt, wenn sie relativ kompakt und abgeschlossen ist.*

Beweis:
Für den Fall, dass M kompakt ist folgt die relative Kompaktheit sofort. Es bleibt also die Abgeschlossenheit zu zeigen: Sei $x \in X \backslash M$. Für jedes $y \in M$ ist dann $r(y) := \|x - y\| /2 > 0$, und die offene Kugel $(B_X(y; r(y)) : y \in X)$ ist bereits eine offene Überdeckung von M. Nun lassen sich wegen der Kompaktheit von M $y_1, ..., y_m \in M$ finden, sodass

$$M \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B_X(y_i, r(y_i)).$$

Wir wählen nun r als das Minimum der Radien. Dann gilt $B_X(x; r) \subseteq X \backslash M$. Damit ist x innerer Punkt von $X \backslash M$. Da jedoch das x beliebig gewählt war, ist $X \backslash M$ offen in X. Schließlich ist eine Menge genau dann abgeschlossen, wenn ihr Komplement offen ist. Damit ist M abgeschlossen.
Die Rückrichtung ist nun klar, da M relativ kompakt und abgeschlossen ist. Es gilt damit $M = \overline{M}$ ist kompakt. $\square$

Lemma 2.2 *Eine relativ kompakte Menge $M \subseteq X$ ist stets beschränkt.*

Beweis:
Ist M relativ kompakt, dann ist die Menge $\overline{M}$ kompakt. Sie wird durch das System aller Kugeln $\{B_X(n) : n = 1, 2, 3, ...\}$[1] überdeckt. Nun können wir wegen der Relativkompaktheit endlich viele Kugeln $B_X(n_1), ..., B_X(n_m)$ finden, die bereits M überdecken. O. B. d. A gilt: $n_1 \leq \ldots \leq n_m$. Dies bedeutet, dass M in $B(n_m)$ enthalten und daraus resultierend beschränkt ist. $\square$

Nachdem die bedeutenden Eigenschaften Konvexität und Kompaktheit definiert worden sind, wird das ϵ–Netz definiert. Dieses wird sich zum Einem im Beweis

[1] Wenn wir die Kugel mit Mittelpunkt $x = 0$ betrachten, schreiben wir immer $B_X(r)$ anstatt $B_X(0; r)$.

des Schauderschen Fixpunktsatzes wiederfinden und zum Anderen die Möglichkeit bieten den Begriff der präkompakten[2] Menge einzuführen. Anschaulich betrachtet realisiert ein ϵ–Netz eine Überdeckung einer Teilmenge von X durch endlich viele Kugeln vom Radius ϵ.

Definition 2.7 (endliches ϵ–Netz) *Sei $\epsilon > 0$. Eine endliche Menge $\{z_1, \ldots, z_m\}$ in X heißt endliches ϵ-Netz für $M \subseteq X$, falls*

$$M \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} B_X(z_j, \epsilon)$$

gilt.

Definition 2.8 (präkompakt) *Eine Menge $M \subseteq X$ heißt präkompakt bzw. total beschränkt, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein endliches ϵ-Netz für M gibt.*

Besonders bedeutend ist der Zusammenhang zwischen relativ kompakten und präkompakten Mengen, der im folgenden Satz von Hausdorff gegeben wird. Obwohl dieser Satz grundlegend ist und in vielen Beweisen benötigt wird, wollen wir auf den Beweis aus Umfangsgründen verzichten. Für den Beweis wird auf die Literatur zur Funktionalanalysis [?] verwiesen.

Satz 2.1 (Hausdorff) *Sei X ein Banachraum und $M \subseteq X$. Dann sind die folgenden vier Aussagen äquivalent:*

1. *M ist relativ kompakt.*
2. *Ist $(A_n)_n$ eine monoton fallende Folge nichtleerer, abgeschlossener Teilmengen von $\overline{M}$, so ist*
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \varnothing.$$
3. *Jede Folge $(x_n)_n$ in M hat eine in X konvergente Teilfolge.*
4. *M ist präkompakt.*

2.2 Beschränktheit und Kompaktheit von Operatoren

Um später den Fixpunktsatz von Schauder auf die im Vorwort thematisierte Operatorgleichung (1.1) in den verschiedenen Situationen anwenden zu können, führen wir den Begriff des kompakten Operators ein. Wir verlassen nun die lineare Analysis. Im folgenden seien X, Y normierte Räume und $A : X \longrightarrow Y$ ein Operator. Der Operator A heißt beschränkt, wenn er beschränkte Teilmengen von X in beschränkte Teilmengen von Y überführt. Außerdem können wir folgende Definition der Kompaktheit eines Operators formulieren:

[2] In der Literatur lässt sich häufig auch der Begriff der totalen Beschränktheit finden.

Definition 2.9 (Kompakte Operatoren) *Sind X, Y normierte Räume, dann heißt der Operator $A : M \subseteq X \longrightarrow Y$ kompakt, wenn A stetig ist und beschränkte Mengen in relativ kompakte Mengen überführt.*

Diese Definition gilt für alle Operatoren. In den folgenden Kapiteln wollen wir nochmals die Eigenschaften von linearen und nichtlinearen Operatoren differenziert betrachten.

2.2.1 Lineare Operatoren

Bekanntlich heißt ein Operator linear, wenn er homogen und additiv ist. Ist ein linearer Operator beschränkt, so kann die Beschränktheit folgendermaßen formuliert werden. $A : X \longrightarrow Y$ überführe als beschränkter Operator beschränkte Mengen in beschränkte Mengen. Das bedeutet, es existiert ein $c \geq 0$ derart, dass

$$\|Ax\|_Y \leq c\,\|x\|_X \qquad \text{für alle } x \in X \tag{2.4}$$

gilt. Interessanter ist bei linearen Operatoren jedoch die Tatsache, dass Beschränktheit und Stetigkeit eines Operators gleichbedeutend sind, was wir nun beweisen werden.

Lemma 2.3 *Sei $A : X \to Y$ ein linearer Operator. Dann sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:*

1. *A ist beschränkt.*
2. *A ist stetig auf ganz X.*
3. *A ist stetig in $x_0 \in X$.*

Beweis:
Zunächst zeigen wir, dass aus Beschränktheit Stetigkeit folgt. Gilt $x_n \to x \in X$, so folgert man mit (**??**) sofort

$$\|Ax_n - Ax\| = \|A(x_n - x)\| \leq c\,\|x_n - x\| \to 0,$$

d.h. A ist stetig in $x \in X$.
Nach der Stetigkeitsdefinition folgt aus der Stetigkeit auf ganz X auch die Stetigkeit in $x_0 \in X$.
Schließlich zeigt man ausgehend von der Stetigkeit in $x_0 \in X$ die Beschränktheit. Ist nämlich A stetig in x_0, so lässt sich zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ finden derart, dass $\|Az - Ax_0\| \leq \epsilon$ für $\|z - x_0\| \leq \delta$ ist.
Sei also $\epsilon = 1$. Ist nun $x \in X$ ein beliebiges von nullverschiedenes Element, so erfüllt gerade z:= $x_0 + \frac{\delta x}{\|x\|}$ die Gleichheit $\|z - x_0\| = \delta$. Damit folgt jedoch

$$1 \geq \|Az - Ax_0\| = \left\| A(\frac{\delta x}{\|x\|}) \right\| = \frac{\delta\,\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Die Beschränktheitsbedingung (**??**) ist also für c:=$1/\delta$ erfüllt.

□

Schließlich wollen wir kompakte, lineare Operatoren durch Folgen charakterisieren.

Lemma 2.4 (Kompaktheit linearer Operatoren) *Ein linearer Operator $A : X \to Y$ ist genau dann kompakt, wenn gilt: Ist $(x_n)_n$ eine beschränkte Folge in X, so enthält $(Ax_n)_n$ eine in Y konvergente Teilfolge.*

Der Beweis ergibt sich als Folgerung aus Satz 2.1. Explizit soll dieser nicht geführt werden.
Damit haben wir bereits lineare, kompakte Operatoren klassifiziert. Vor allem stellt die Kompaktheit linearer Operatoren einen wichtigen Begriff zur Einordnung der Stetigkeit und der darausfolgenden Beschränktheit dar. Um Kompaktheit zu zeigen, wird in der Praxis häufig lediglich die Einheitskugel betrachtet. Wird diese durch den Operator in eine relativ kompakte Teilmenge des Bildraumes überführt, so folgt aufgrund der Homogenität der linearen Operatoren die Kompaktheit. Im Folgenden werden wir sehen, dass bei nichtlinearen Operatoren die eben gefundenen Zusammenhänge wieder verloren gehen.

2.2.2 Nichtlineare Operatoren

Die bekannten Definitionen für beschränkte und stetige Operatoren bleiben auch im nichtlinearen Fall erhalten. Wir wollen nun den konkreten Fall $X = Y := \mathbb{R}$ betrachten. Hier gibt es im nichtlinearen Fall Funktionen, die nirgends stetig, aber beschränkt sind. Damit ist das Lemma 2.3 nicht mehr gültig.
Die Kompaktheit eines solchen Operators impliziert nach Definition 2.9 immer noch die Beschränktheit desjenigen. In Lemma 2.4 wurde Kompaktheit im linearen Fall charakterisiert. In ähnlicher Form kann dies auch für den nichtlinearen Fall geschehen. Teile des Beweises des folgenden Lemmas lassen sich auf den Beweis von 2.4 zurückführen. Auch hier wird wieder auf die Literatur von Appel und Väth [**?**] verwiesen, da der Beweis keine fundamentalen Aussagen für den Schauderschen Fixpunktsatz enthält.

Lemma 2.5 (Kompaktheit nichtlinearer Operatoren)
Ein Operator $A : X \to Y$ ist genau dann kompakt, wenn dieser stetig ist und folgende Bedingung erfüllt ist: Ist $(x_n)_n$ eine beschränkte Folge in X, so enthält $(Ax_n)_n$ eine in Y konvergente Teilfolge.
Weiterhin gilt: Ist $A : X \to Y$ kompakt und $B : Y \to Z$ stetig , so ist $BA : X \to Z$ kompakt. Ist $A : X \to Y$ beschränkt und $B : Y \to Z$ kompakt, dann ist $BA : X \to Z$ kompakt.

2.3 Hilfssätze

Nun sind alle wichtigen Definitionen für den Schauderschen Fixpunktsatz geklärt. Bevor mit der Formulierung des Satzes und dessen Beweis begonnen wird, konstruieren wir noch einen Hilfssatz, der den Beweis des Schauderschen Fixpunksatzes strukturiert. In der Literatur kann man diesen Satz auch unter dem Namen Schauder–Projektion finden. Zuvor jedoch wird noch der Brouwersche Fixpunktsatz und eine Erweiterung dargestellt, die in dieser Arbeit ohne Beweis formuliert werden. Später werden wir sehen, dass sich der Brouwersche Fixpunktsatz direkt aus dem Satz von Schauder folgern lässt.

2.3.1 Brouwerscher Fixpunktsatz

Satz 2.2 (Brouwerscher Fixpunktsatz für Kugeln) *Ist K eine abgeschlossene Kugel des $X = \mathbb{R}^n$, so besitzt jede stetige Selbstabbildung f von K wenigstens einen Fixpunkt.*

Daraus ergibt sich als Folgerung der für unseren Beweis viel aussagekräftigere Satz:

Satz 2.3 *Sei X ein normierter Raum und $M \subseteq X$ ein nichtleerer, kompakter und konvexer Unterraum. Dann hat jede nichtleere, konvexe und kompakte Teilmenge von $X = \mathbb{R}^n$ mindestens einen Fixpunkt.*

Für die Beweise der beiden Sätze 2.2 und 2.3 wird auf die Bücher [**?**] und [**?**] verwiesen.

2.3.2 Schauder–Projektionsabbildung

Im folgenden sei X wieder ein Banachraum und $M \subseteq X$ kompakt. Mit der obigen Vorbereitung (Lemma 2.1 und Satz 2.1) folgt, dass M auch relativ kompakt und präkompakt ist. Damit gibt es ein $\epsilon > 0$ derart, dass wir ein endliches ϵ–Netz $\{z_1, \dots z_m\}$ mit $z_j \in X$ für alle $j = 1, \dots, m$ erhalten. Definiere nun für $j = 1, ..., m$ ein $\mu_j : M \to [0, \infty)$ durch

$$\mu_j := \mu_j(x) := \begin{cases} \epsilon \text{ - } \|x - z_j\|, & \text{falls } x \in B_X(z_j, \epsilon) \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man sieht leicht, dass $\mu_j > 0$ für wenigstens ein $j = 1, \dots, m$ ist. Dann ist aber auch $\sum_{j=1}^m \mu_j > 0$ für alle $x \in X$. Schließlich können wir den sogenannten Schauderoperator $P_\epsilon : M \to X$ mit

$$P_\epsilon := P_\epsilon(x) := \frac{\sum_{j=1}^m \mu_j z_j}{\sum_{j=1}^m \mu_j} \tag{2.5}$$

konstruieren. Er ist offensichtlich wohldefiniert. Die Abhängigkeit des Operators von x spiegelt sich in derer von μ_j wider. Der Zweck dieses Operators wird erst im nächsten Kapitel offenbar. Um ihn für den Beweis des Schauderschen Fixpunktsatzes nutzen zu können, wollen wir seine Eigenschaften im folgenden Satz klassifizieren, bevor wir zum nächten Kapitel übergehen können.

Satz 2.4 *Sei $M \subseteq X$ präkompakt und sei P_ϵ durch (**??**) definiert. Dann ist P_ϵ ein stetiger Operator von M nach* conv(M)*, und es gilt*

$$\|x - P_\epsilon\| < \epsilon \tag{2.6}$$

für alle $x \in X$.

Beweis:

- Zeige zunächst: Der Operator bildet stetig in $\text{conv}(M)$ ab.
  Die Stetigkeit des Operators ergibt sich sofort, da dieser aus dem Kompositum stetiger Abbildungen μ_j erzeugt wird. Nun bleibt

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\mu_j}{\sum_{j=1}^{m}\mu_j}\right) = 1 \qquad \text{und} \qquad \left(\frac{\mu_j}{\sum_{j=1}^{m}\mu_j}\right) \in [0,1]$$

  zu zeigen. Dieses ergibt sich jedoch leicht wegen

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\mu_j}{\sum_{j=1}^{m}\mu_j}\right) = \frac{\sum_{j=1}^{m}\mu_j}{\sum_{j=1}^{m}\mu_j} = 1 \quad \text{und} \quad 0 < \mu_j < \sum_{j=1}^{m}\mu_j.$$

  Damit gilt $P_\epsilon : M \to \text{conv}(M)$.

- Es bleibt nur noch Abschätzung (2.6) zu zeigen:

$$\begin{aligned}
\|x - P_\epsilon\| &\overset{(??)}{=} \left\| \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\mu_j}{\sum_{j=1}^{m}\mu_j}\right)x - \frac{\sum_{j=1}^{m}\mu_j z_j}{\sum_{j=1}^{m}\mu_j} \right\| \\
&= \left\| \frac{\sum_{j=1}^{m}\mu_j(x - z_j)}{\sum_{j=1}^{m}\mu_j} \right\| \\
&\overset{\Delta-Ungl.}{\leq} \frac{\sum_{j=1}^{m}\mu_j \|x - z_j\|}{\sum_{j=1}^{m}\mu_j} < \epsilon.
\end{aligned}$$

$\square$

3 Fixpunktsatz von Schauder

Da wir alle notwendigen Eigenschaften definiert haben, kann in dem folgenden Kapitel der Schaudersche Fixpunktsatz formuliert und bewiesen werden. In Erinnerung an das vorausgestellte Probelm, dem Lösen einer Gleichung $x = Ax$, werden wir sehr schnell feststellen, dass die zunächst formulierte Form des Schauderschen Fixpunktsatzes für die Praxis eher ungeeignet ist. Ziel ist es jedoch, einen allgemein gültigen und auch nutzbaren Satz zu formulieren. Aus diesem Grund wird im Anschluss an den ersten Beweis eine zweite, anwendungsorientierte Version des Satzes mit Hilfe des Lemmas von Mazur bewiesen. Schließlich werden wir unter Berücksichtigung kompakter Operatoren eine dritte Version folgern.

3.1 Fixpunktsatz von Schauder, 1. Version

Satz 3.1 (Fixpunktsatz von Schauder, 1. Version) *Ist M eine konvexe, kompakte und nichtleere Teilmenge eines Banachraumes X und ist $A : M \to M$ stetig, so besitzt A wenigstens einen Fixpunkt $\widehat{x}$ in M.*

Der Beweis dieses Satzes kann in drei wesentliche Schritte gegliedert werden:

1. Die Abbildung A wird durch den Schauderoperator in eine Näherungsabbildung überführt.

2. Die Existenz von Fixpunkten in der Näherungsabbildung wird mit Hilfe des Fixpunktsatzes von Brouwer bewiesen.

3. Die Fixpunkte der Abbildung A werden aus den Fixpunkten der Näherungsfunktion konstruiert.

Beweis:

1. *Konstruktion der Näherungsabbildung*
   Die Bildmenge der Abbildung A liegt wieder in M. Da M kompakt ist, ist M auch präkompakt. Definiere nun den Operator
   $$A_\epsilon := P_\epsilon(A(x)). \tag{3.1}$$
   Dann folgt aus Satz 2.4, dass durch A_ϵ aufgrund der Eigenschaft des Schauderoperators eine Näherungsabbildung definiert wird, die den Bildpunkt $A(x)$ höchstens um ϵ verschiebt. Es gilt
   $$\|A(x) - A_\epsilon(x)\| < \epsilon. \tag{3.2}$$

2. *Existenz von Fixpunkten der Näherungsabbildung*
   Im Beweis zu Satz 2.4 ist gezeigt worden, dass der Schauderoperator eine Menge M in ihre konvexe Hülle abbildet. Somit liegen für alle $x \in M$ die Bildpunkte $A_\epsilon(x)$ in der konvexen Hülle. Wie in Kapitel 1 erläutert, gilt insbesondere $\mathrm{conv}(M) = M$, da M konvex ist. Damit bildet A_ϵ sogar von der konvexen in die konvexe Hülle von M ab. Da die konvexe Hülle jedoch wegen der Präkompaktheit von M aus den endlich vielen Punkten $z_1, \ldots, z_m$ gebildet wird, kann die konvexe Hülle als konvexe Punktmenge in einem euklidischen Raum interpretiert werden. Damit ergibt sich bereits die Existenz eines Fixpunktes $\widehat{x_\epsilon}$ mit Hilfe des Fixpunksatzes von Brouwer und dessen Erweiterung (vgl. Kapitel 2.3.2), je nach Wahl von ϵ.

3. *Konstruktion eines Fixpunktes*
   Um den Fixpunkt der Abbildung A zu konstruieren wird ein konkretes $\epsilon = \frac{1}{k}$ gewählt, zu dem sich ein Fixpunkt der Näherungsfunktion A_ϵ ergibt. Dieser wird mit $\widehat{x}_k$ bezeichnet. Epsilon ist dabei so gewählt worden, dass für große k der Radius der überdeckenden Kugeln immer kleiner wird. Es werden immer mehr Kugeln zur Überdeckung benötigt.
   Mit der Gleichung (3.2) des ersten Beweisschrittes folgt sofort

   $$\|A(\widehat{x}_k) - A_\epsilon(\widehat{x}_k)\| = \|A(\widehat{x}_k) - \widehat{x}_k\| \leq \frac{1}{k}. \tag{3.3}$$

   Interpretiert man den Fixpunkt als Folge $(\widehat{x}_k)_k$, so besitzt diese wegen der Kompaktheit von M (vgl. Satz 2.1) eine konvergente Teilfolge $(\widehat{x}_{k_i})_i$. Der Grenzwert dieser Folge sei mit $\tilde{x}$ bezeichnet. Dann folgt wegen der Stetigkeit von A

   $$A(\widehat{x}_{k_i}) \to A(\tilde{x}), \qquad \text{für } i \to \infty. \tag{3.4}$$

   Es muss aber mit (3.3) gelten

   $$\lim_{i\to\infty} \|A(\widehat{x}_{k_i}) - \widehat{x}_{k_i}\| \leq \lim_{i\to\infty} (\frac{1}{k_i}). \tag{3.5}$$

   Damit ist $\tilde{x}$ der gesuchte Fixpunkt, denn aus (3.5) und (3.4) folgt aufgrund der Stetigkeit und Nichtnegativität einer Norm $0 = \|A(\tilde{x}) - \tilde{x}\|$ und schließlich $0 = A(\tilde{x}) - \tilde{x}$.

□

Leider fordert die erste Version des Satzes, dass die zugrundeliegende Menge M kompakt ist. Dies stellt eine bedeutende Einschränkung dar und ist in der Anwendung häufig nicht gegeben. Die oben bewiesene Version des Schauderschen Fixpunktsatzes kann dem Anspruch einer universellen Lösungsmethode der Gleichung (1.1) folglich nicht gerecht werden. Als Konsequenz wird nun eine zweite Version und schließlich eine dritte Version bewiesen.

3.2 Fixpunktsatz von Schauder, 2. Version

Satz 3.2 (Fixpunktsatz von Schauder, 2. Version) *Sei M eine nichtleere, abgeschlossene und konvexe Teilmenge eines Banachraums X und A: $M \to M$ stetig. Dann besitzt A wenigstens einen Fixpunkt $\widehat{x}$, sofern die Bildmenge $A(M)$ relativ kompakt ist.*

Bevor mit dem Beweis des Satzes begonnen werden kann, muss das Lemma von Mazur bewiesen werden, welches eine zentrale Rolle im Beweis von Satz 3.2 spielt. Für dieses Lemma gelten dieselben Voraussetzungen wie im vorherigen Satz.

Lemma 3.1 (Mazur) *Die abgeschlossene konvexe Hülle einer relativ kompakten Menge M ist stets kompakt.*

Beweis:
Sei $\epsilon > 0$. Da M relativ kompakt nach Vorausetzung ist, folgt aus Satz 2.1 die Präkompaktheit von M. Damit gibt es ein $\epsilon/2$-Netz. Es existieren folglich $z_1, \ldots, z_m \in X$, sodass es für alle $x \in M$ ein $j \in \{1, \ldots, m\}$ gibt mit

$$\|x - z_j\| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{3.6}$$

Damit können wir eine Funktion $f : M \longrightarrow \{1, \ldots, m\}$ definieren, sodass jedem $x \in M$ der kleinste Index j zugeordnet wird, für den (3.8) erfüllt ist. Es gelte

$$f(x) = j.$$

Nach Definition der konvexen Hülle $\operatorname{conv}(M)$ lassen sich alle $y \in \operatorname{conv}(M)$ durch $y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k$ darstellen. Dabei ist $\lambda_k \in [0,1]$, $y_k \in M$ für alle $k = 1, \ldots, n$, $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ und $n = n(y) \in \mathbb{N}$. Damit erhalten wir

$$\|y - z_j\| = \left\| y - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k z_{f(y_k)} \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (y_k - z_{f(y_k)}) \right\| \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \left\| y_k - z_{f(y_k)} \right\| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

Da nun aber

$$\left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k z_{f(y_k)} \right\} \in \operatorname{conv}(\{z_1, \ldots, z_m\}) =: L$$

finden wir $\epsilon/2$- Kugeln derart, dass

$$\operatorname{conv}(M) \subseteq \bigcup_{x \in L} B_X(x, \epsilon/2). \tag{3.7}$$

Wir überlegen nun, dass es endlich viele Elemente $l_1, \ldots, l_N$ gibt, so dass

$$L \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B(l_i, \epsilon/2) \tag{3.8}$$

gilt. Dazu müssen wir zeigen, dass $L := \operatorname{conv}(\{z_1, \ldots, z_m\})$ relativ kompakt ist. Dies ist aber offensichtlich, da K als Teilmenge eines endlich dimensionalen Raumes

beschränkt ist.
Dann gilt aber mit (3.7) und (3.8)

$$\operatorname{conv}(M) \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B(l_i, \epsilon).$$

Damit haben wir zur konvexe Hülle ein endliches ϵ–Netz gefunden. Nach Definition 2.7 ist die konvexe Hülle damit präkompakt und mit dem Satz von Hausdorff auch relativ kompakt. Wir erhalten also, dass die konvexe Hülle einer relativ kompakten Menge stets relativ kompakt ist. Nach Vorausetzung ist die konvexe Hülle sogar abgeschlossen. Damit ist die abgeschlossene konvexe Hülle stets kompakt nach Lemma 2.1. □

Kommen wir nun zum Beweis, der 2. Version des Schauderschen Fixpunktsatzes.

Beweis:
Wir wissen, dass M eine abgeschlossene, konvexe Menge eines Banachraumes X ist. Es gilt also mit der Bemerkung zur konvexen Hülle (Kapitel 2.1) $\overline{\operatorname{conv}}(M) = M$. Die Abbildung A bildet M stetig in sich ab. Somit muss für die Bildmenge $A(M) \subseteq M = \overline{\operatorname{conv}}(M)$ und folglich

$$\overline{\operatorname{conv}}(A(M)) \subseteq M \tag{3.9}$$

gelten. Dann ist die Abbildung $A : M \to M$ nach (**??**) insbesondere auf $\overline{\operatorname{conv}}(M)$ definiert. Das Bild A(M) ist sicherlich in der abgeschlossenen konvexen Hülle des Bildes enthalten, da diese stets die kleinste abgeschlossene konvexe Obermenge ist. Somit haben wir eine Abbildung $A_{|\overline{\operatorname{conv}}A(M)} : \overline{\operatorname{conv}}(A(M)) \to \overline{\operatorname{conv}}(A(M))$ erhalten.

Wir wissen, dass die Bildmenge $A(M)$ nach Voraussetzung relativ kompakt ist. Mit dem Lemma von Mazur folgt, dass die abgeschlossene konvexe Hülle kompakt ist. Damit kann auf die Abbildung $A_{|\overline{\operatorname{conv}}A(M)} : \overline{\operatorname{conv}}(A(M)) \to \overline{\operatorname{conv}}(A(M))$ der Schaudersche Fixpunktsatz in der ersten Version angewendet werden. Die Existenz eines Fixpunktes ist bewiesen. □

3.3 Fixpunktsatz von Schauder, 3. Version

Wir haben nun zwei Versionen des Schauderschen Fixpunktsatzes gegeben. Es sei nochmals darauf hingewiesen, dass im endlichdimensionalen Fall der Schaudersche Fixpunktsatz gerade dem Brouwerschen Fixpunktsatz entspricht.
Darüber hinaus sind wir in der Lage mit nur wenig Aufwand eine dritte Version des Schauderschen Fixpunktsatzes zu beweisen, die sich von dem Begriff der Stetigkeit der Abbildung A löst und den Begriff des kompakten Operators berücksichtigt.

Satz 3.3 (Fixpunktsatz von Schauder, 3. Version) *Sei M eine nichtleere, abgeschlossene, beschränkte und konvexe Teilmenge eines Banachraums X. Dann besitzt $A : M \longrightarrow M$ einen Fixpunkt in M, wenn A ein kompakter Operator ist.*

Beweis:
Nach Definition 2.9 folgt aus der Kompaktheit des Operators A, dass A stetig ist und beschränkte Mengen in relativ kompakte Mengen abbildet. Damit ist die Bildmenge $A(M)$ relativ kompakt und der Fixpunktsatz von Schauder in der 2. Version liefert den Fixpunkt. $\square$

4 Prinzip von Leray–Schauder

Im Prinzip sind wir in der Lage mit den drei Versionen des Fixpunktsatzes die im Vorwort thematisierten mathematischen Problemstellungen zu lösen. Ob ein mathematisches Problem die an den Schauderschen Fixpunktsatz geknüpften Bedingungen erfüllt, muss individuell betrachtet werden. Nicht immer können die Bedingungen des Schauderschen Fixpunktsatzes erfüllt werden. Aus diesem Grund entwickelten sich für verschiedene Problemstellungen zahlreiche Erweiterungen des Schauderschen Fixpunktsatzes. Eine bedeutende Weiterentwicklung ist das Prinzip von Leray–Schauder. In der Literatur findet man auch die Bezeichnung Leray–Schauder–Alternative. Diese Benennung suggeriert bereits die Anwendbarkeit des folgenden Satzes als Alternative zum Schauderschen Fixpunktsatz. Die Leray–Schauder–Alternative sichert die Existenz eines Fixpunktes der Gleichung (1.1), stellt jedoch auch andere Bedingungen an das mathematische Problem.
In diesem Kapitel werden wird das Prinzip von Leray–Schauder analog zum Fixpunktsatz von Schauder in zwei Versionen kennenlernen. Darüber hinaus wollen wir in diesem Zusammenhang einen weiteren Satz formulieren. Im Anschluss werden wir durch ein Beispiel aus der Integralrechnung die Bedeutung des Prinzips untermauern.
In den nun formulierten Sätzen genügt, wie schon beim Schauderschen Fixpunktsatz, als zugrundeliegender Raum X ein normierter Raum. Wir werden aber voraussetzen, dass X wieder ein Banachraum ist, um der Tradition der vorhergehenden Fixpunktsätze zu folgen.

4.1 Prinzip von Leray–Schauder, 1. Version

Wie in Kapitel 3 sei X als Banachraum und eine Abbildung $A : X \longrightarrow X$ gegeben. Wir suchen wieder einen Fixpunkt $\widehat{x}$ mit

$$A\widehat{x} = \widehat{x}. \tag{4.1}$$

Dazu wollen wir die parametrisierte Gleichung

$$x_t = tAx_t \qquad \text{für} \qquad 0 \leq t < 1 \tag{4.2}$$

betrachten. Es existiere ein $r > 0$, sodass für alle Lösungen der nichtlinearen Eigenwertgleichung (4.2) irgendein $t \in [0, 1)$ die A–priori–Abschätzung

$$\|x_t\| \leq r \tag{4.3}$$

erfüllt. An dieser Stelle sei angemerkt, dass die Abschätzung (4.3) nicht die Lösbarkeit der Gleichung (4.2) impliziert. Wir verlangen von unserer Lösung also gewisse Eigenschaften, ohne uns um die Existenz der Lösung gekümmert zu haben.
Nun können wir die Leray–Schauder–Alternative in erster Version formulieren.

Satz 4.1 (Leray–Schauder, 1. Version) *Sei $A : X \longrightarrow X$ eine kompakte Abbildung eines Banachraums X. Die Fixpunktgleichung $x = Ax$ besitzt mindestens eine Lösung, wenn ein $r > 0$ existiert, so dass für alle Lösungen x_t von (4.2) für ein $t \in [0,1]$ die A–priori–Abschätzung (4.3) erfüllt ist.*

Zur besseren Strukturierung des Beweises sollen zunächst die wesentlichen Beweisschritte aufgefürht werden. Wir werden sehen, dass diese Beweisschritte mit der Beweisidee des Schauderschen Fixpunktsatzes in seiner ersten Version korrespondieren. Der Nachweis von Satz 4.1 lässt sich wie folgt gliedern:

1. Wir betrachten eine Einschränkung der Abbildung A.
2. Die Stetigkeit der neuen Abbildung wird nachgewiesen.
3. Die Kompaktheit dieser Abbildung wird bewiesen.
4. Nach dem Schauderschen Fixpunktsatz ergibt sich ein Fixpunkt der neuen Abbildung. Dies liefert uns schließlich einen Fixpunkt von A.

Beweis:

1. Auch in diesem Beweis wollen wir eine Einschränkung von A, also eine Retraktionsabbildung betrachten

$$A_r x = \begin{cases} Ax; & \text{falls } \|Ax\| \leq 2r \\ \frac{2rAx}{\|Ax\|}; & \text{sonst.} \end{cases} \tag{4.4}$$

   Dabei gelte $x \in X$ und $r > 0$. Wir erinnern, dass $A : X \to X$ wohldefiniert ist. Dann bildet auch $A_r x$ wohldefiniert von X in sich ab. Betrachtet man $A_r x$ so sieht man leicht, dass sogar $\|A_r x\| \leq 2r$. Damit erhalten wir eine Abbildung $A_r : \overline{B}(0; 2r) \longrightarrow \overline{B}(0; 2r)$. Diese Abbildung ist beschränkt, da eine beschränkte Menge in eine beschränkte Menge überführt wird (vgl. Kapitel 2.2).

2. Nun wollen wir zeigen, dass $A_r : X \longrightarrow X$ auch stetig ist. Wir wissen, dass A stetig ist, da A kompakt ist. Dies bedeutet, dass zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für alle $x, y \in X$ $\|x - y\| < \delta$ und $\|Ax - Ay\| < \epsilon$. Nun müssen für die Stetigkeit von A_r vier Fälle unterschieden werden, bei denen $x, y \in X$ mit $\|x - y\| < \delta$ gilt. Bei den nun folgenden Umformungen und Abschätzungen werden vor allem 0–Ergänzung, Dreiecksungleichung und die Stetigkeit von A ausgenutzt.

- Sei $\|Ax\| \leq 2r$ und $\|Ay\| \leq 2r$. Dann folgt:

$$\|A_r x - A_r y\| = \|Ax - Ay\| < \epsilon$$

- Sei $\|Ax\| > 2r$ und $\|Ay\| > 2r$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\|A_r x - A_r y\| &= 2r \cdot \left\| \frac{Ax}{\|Ax\|} - \frac{Ay}{\|Ay\|} \right\| \\
&= 2r \cdot \left\| \frac{Ax - Ay}{\|Ax\|} + Ay(\frac{1}{\|Ax\|} - \frac{1}{\|Ay\|}) \right\| \\
&\leq \frac{2r}{\|Ax\|} \|Ax - Ay\| + \frac{2r\,\|Ay\|}{\|Ax\|\,\|Ay\|} \left|\|Ay\| - \|Ax\|\right| \\
&< \frac{2r\epsilon}{\|Ax\|} + \frac{2r\,\|Ax - Ay\|}{\|Ax\|} < \frac{4r\epsilon}{\|Ax\|}
\end{aligned}$$

- Sei $\|Ax\| \leq 2r$ und $\|Ay\| > 2r$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\|A_r x - A_r y\| &= \left\| Ax - \frac{2rAy}{\|Ay\|} \right\| \\
&\leq \|Ax - Ay\| + \|Ay\| \left| 1 - \frac{2r}{\|Ay\|} \right| \\
&< \epsilon + \|Ay\| - 2r \\
&\leq \epsilon + \|Ax\| + \|Ay - Ax\| - 2r \\
&\leq 2\epsilon
\end{aligned}$$

- Sei $\|Ax\| > 2r$ und $\|Ay\| \leq 2r$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\|A_r x - A_r y\| &= \left\| \frac{2rAx}{\|Ax\|} - Ay \right\| \\
&= \left\| (\frac{2r}{\|Ax\|} - 1)Ax + Ax - Ay \right\| \\
&\leq (\frac{-2r}{\|Ax\|} + 1)\,\|Ax\| + \epsilon \\
&= \|Ax\| - 2r + \epsilon \\
&= \|Ax\| - 2r + \epsilon + \|Ay\| - \|Ay\| \\
&\leq \|Ay\| - 2r + \|Ax - Ay\| + \epsilon \\
&\leq 2\epsilon
\end{aligned}$$

Insgesamt haben wir also die Stetigkeit von $A_r(x)$ gezeigt.

3. Nun soll die Kompaktheit der Abbildung $A_r : \overline{B}(0, 2r) \longrightarrow \overline{B}(0, 2r)$ gezeigt werden. Dazu wollen wir eine Folge $(x_k)_k$ aus $\overline{B}(0, 2r)$ betrachten. Diese ist

offensichtlich beschränkt. Nach Kapitel 2.2 müssen wir die Konvergenz von Teilfolgen untersuchen, um die Kompaktheit nachzuweisen. Aufgrund der Definition von A_r müssen zwei Fälle betrachtet werden:

- *Annahme: Es existiert eine Teilfolge $(x_{k_i})_i$ von $(x_k)_k$, so dass $\|A(x_{k_i})_i\| \leq 2r$ für alle i.*
  Dann gilt $A_r(x_{k_i})_i = A(x_{k_i})_i$. Da aber A kompakt ist, existiert eine Teilfolge $(x_{k_{i_l}})_l$ der Teilfolge $(x_{k_i})_i$, sodass $A_r(x_{k_{i_l}})_l$ konvergiert. Insbesondere muss der Grenzwert in der abgeschlossen Kugel liegen.
- *Annahme: Es existiert keine Teilfolge $(x_{k_i})_i$ von $(x_k)_k$, so dass $\|A(x_{k_i})_i\| \leq 2r$ für alle i.*
  Es muss dann eine Teilfolge $(x_{k_i})_i$ von $(x_k)_k$ geben, für die $\|A(x_{k_i})_i\| > 2r$ gilt. Dann liefert die Retraktionsabbildung $A_r(x_{k_i})_i = \frac{2rA(x_{k_i})_i}{\|A(x_{k_i})_i\|}$. Wieder erhalten wir wegen Kompaktheit von A eine Teilfolge der Teilfolge für die

$$\frac{1}{\left\|A(x_{k_{i_l}})_l\right\|} \overset{l\to\infty}{\to} \alpha \qquad \text{und} \qquad A(x_{k_{i_l}})_l \overset{l\to\infty}{\to} \beta$$

  gilt. Diese Folgen sind aber unter der obigen Voraussetzung beide beschränkt. Sie können so gewählt werden, da die Teilfolge $(x_{k_i})_i$ beschränkt und die Abbildung kompakt ist. Damit gilt

$$A_r(x_{k_{i_l}})_l = \frac{2rA(x_{k_{i_l}})_l}{\left\|A(x_{k_{i_l}})_l\right\|} \overset{l\to\infty}{\to} 2r\alpha\beta.$$

  Nach dem Lemma 2.4 folgt die Kompaktheit von $A_r : \overline{B}(0, 2r) \longrightarrow \overline{B}(0, 2r)$.

4. Nun erfüllt die Abbildung A_r alle Bedingungen des Schauderschen Fixpunktsatzes. Dieser liefert folglich die Existenz eins Fixpunktes $\widehat{x}$ in der abgeschlossenen Kugel $\overline{B}(0, 2r)$. Schließlich wollen wir herausfinden, ob dieser auch Fixpunkt der Abbildung $A : X \longrightarrow X$ ist. Hierfür betrachten wir auch beide Möglichkeiten der Retraktionsabbildung:
   - Die Retraktion ist für den Fall $\|Ax\| < 2r$ eben so definiert, dass $A_rx = Ax$. Damit ist in diesem Fall der Fixpunkt von A_r auch Fixpunkt von A.
   - Gilt jedoch $\|Ax\| > 2r$ so werden wir sehen, dass dieser Fall nicht existieren kann. Unter dieser Annahme ergibt sich ein Widerspruch. Es gilt für den Fixpunkt

$$\widehat{x} = A_r\widehat{x} = \frac{2rA\widehat{x}}{\|A\widehat{x}\|}.$$

     Durch Umstellen folgt

$$Ax = \frac{\widehat{x}\,\|Ax\|}{2r},$$

     und damit auch

$$\|Ax\| = \frac{\|\widehat{x}\|\,\|Ax\|}{2r}.$$

Durch Umstellen und Division ergibt sich folgende Aussage

$$\|\widehat{x}\| = 2r.$$

Damit ist $\hat{x}$ Lösung der nichtlinearen Eigenwertgleichung (4.2) für $t = \frac{2r}{\|Ax\|}$. Nach Voraussetzung (4.3) gilt aber

$$\|\widehat{x}\| \leq r.$$

Wir erhalten einen Widerspruch!

□

4.2 Prinzip von Leray–Schauder, 2. Version

Für einige Probleme ist es hilfreich, das Prinzip von Leray–Schauder ein wenig anders zu formulieren. Wieder suchen wir Fixpunkte der Gleichung (4.1).

Satz 4.2 (Leray – Schauder, 2. Version) *Sei X ein Banachraum und $A : \overline{B}_X(x_0; r) \longrightarrow X$ kompakt. Es gelte die Bedingung:*

$$Ax - x_0 \neq \xi(x - x_0) \quad \text{für} \quad \xi > 0 \text{ und } \|x - x_0\| = r. \tag{4.5}$$

Dann hat A einen Fixpunkt.

Im Vergleich zur ersten Version des Leray–Schauder–Prinzip ist diese Version etwas allgemeiner gefasst. Im Prinzip kann unsere erste Version aus der zweiten Version gefolgert werden. Aus diesem Grund sind die Beweise sehr ähnlich und auch die Beweisidee ist analog zur Vorgehensweise beim Beweis von Satz 4.1. Deshalb wird bei einigen Beweisschritten auf den obigen Beweis verwiesen.

Beweis:

1. Wir betrachten wieder eine Einschränkung von A derart, dass für ein $x \in \overline{B}_X(x_0; r)$

$$A_r x = \begin{cases} Ax; & \text{falls } Ax \in \overline{B}_X(x_0; r) \\ x_0 + \frac{r(Ax - x_0)}{\|Ax - x_0\|}; & \text{falls } \|Ax - x_0\| \geq r \end{cases} \tag{4.6}$$

   gilt. Analog zum obigen Beweis ergibt sich, dass $A_r : \overline{B}_X(x_0; r) \longrightarrow \overline{B}_X(x_0; r)$.

2. Auch die Stetigkeit von A_r lässt sich analog zum obigen Beweis zeigen.

3. Darüber hinaus kann wie oben unter Zuhilfenahme von Folgen $(x_k)_k$ bewiesen werden, dass A_r kompakt ist.

4. Nun erfüllt die Abbildung A_r alle Bedingungen des Schauderschen Fixpunktsatzes . Dieser liefert folglich die Existenz eines Fixpunktes $\widehat{x}$. Schließlich zeigen wir auch hier durch eine Fallunterscheidung, dass $\widehat{x}$ auch Fixpunkt A ist.

- Für $Ax \in \overline{B}_X(x_0; r)$ sieht man leicht, dass der Fixpunkt der Abbildung A_r auch Fixpunkt von A ist, denn es gilt $A_r x = Ax$.
- Es sei angemerkt, dass wir die Situation $\|Ax - x_0\| = r$ bereits im ersten Fall betrachtet haben. Wir wollen nun den Fall $\|Ax - x_0\| > r$ betrachten und dessen Existenz zum Widerspruch führen. In diesem Fall liefert die Abbildung (**??**)

  $$A_r \widehat{x} = x_0 + \frac{r(A\widehat{x} - x_0)}{\|A\widehat{x} - x_0\|}$$

  Unter Berücksichtigung, dass $\widehat{x}$ Fixpunkt von A_r ist, führt das Umstellen der Gleichung zu

  $$A\widehat{x} - x_0 = \frac{(\widehat{x} - x_0)\,\|A\widehat{x} - x_0\|}{r},$$

  wobei

  $$\xi = \frac{\|A\widehat{x} - x_0\|}{r} \overset{\|Ax - x_0\| > r}{>} 1,$$

  gelten muss. Dabei gilt $\|\widehat{x} - x_0\| = r$
  Dies ist ein Widerspruch zur Bedingung (**??**).

□

Wir können nun mit geringem Aufwand den folgenden Satz beweisen.

Satz 4.3 *Sei X ein Banachraum und $A : X \longrightarrow X$ kompakt. Dann gibt es ein $\lambda \geq 1$, so dass die Gleichung $Ax = \lambda x$ eine Lösung besitzt.*

Betrachten wir den Satz, so stellen wir fest, dass dieser nicht zwangsläufig die Existenz einer Lösung des im Vorwort formulierten Problems (1.1) $x = Ax$ sichert. Folglich erscheint der Satz wenig aussagekräftig. Dennoch sollte unser Interesse geweckt werden. Es ist bemerkenswert, dass nur die Kompaktheit des Operators A gefordert wird. Erinnern wir uns an die Formulierungen vom Schauderschen Fixpunktsatz oder vom Prinzip von Leray–Schauder, so fordern diese weitere Bedingungen an die Selbstabbildung A. Bei vielen im Vorwort thematisierten Problemstellungen kann die Kenntnis über eine Lösung der Form $Ax = \lambda x$ mit $\lambda \geq 1$ bereits zufriedenstellend sein. Wir wollen nun noch den Beweis von Satz 4.3 führen.

Beweis:

Wir nehmen an, dass kein $\lambda > 1$ existiert, für das die Gleichung $Ax = \lambda x$ eine Lösung besitzt. Dann gibt es auch keine Lösung von $x = \frac{1}{\lambda} Ax$. Anders formuliert bedeutet dies, dass die parametrisierte Eigenwertgleichung $x_t = tAx$ mit $t = 1/\lambda \in (0, 1)$ insbesondere keine Lösung besitzt. Dann existiert nach Satz 4.1 mindestens eine Lösung für $\lambda = 1$. □

4.3 Prinzip von Leray–Schauder in der Anwendung

Ein bedeutendes Anwendungsgebiet der Leray–Schauder–Alternative sind nichtlineare Integralgleichungen. So können z. B. nichtlineare partielle Differentialgleichungen in eine Integralgleichung überführt werden. Bei diesen ist die Existenz von Lösungen der Intergralgleichung von besonderem Intresse. Wir wollen einmal eine konkrete nichtlineare Fredholmsche Integralgleichung 2. Art betrachten. Es sei

$$u(x) = f(x) + \alpha \int_a^b \sin(u(y))dy \tag{4.7}$$

mit $x \in [a, b]$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f \in C([a, b])$. f ist somit eine reellwertige, stetige Funktion versehen mit der Maximumsnorm.
Wir wollen die Existenz der Lösungen $u \in C([a, b])$ bestätigen.
Dafür sei angemerkt, dass $C([a, b])$ mit der Maximumsnorm ein Banachraum ist. Nun sei

$$(Au)(x) := f(x) + \alpha \int_a^b \sin(u(y))dy \tag{4.8}$$

mit obigen Bedingungen gegeben. Wir wollen zunächst annehmen, dass $A : C([a, b]) \longrightarrow C([a, b])$ kompakt ist. Weiterhin sei $t \in [0, 1]$ beliebig aber fest. Dann gilt für jede Lösung u_t von $u_t = tAu_t$

$$\|u_t\| = \|tAu_t\| = \max_{x\in[a,b]} \left| tf(x) + \alpha t \int_a^b \sin(u(y))dy \right| .$$

Wir wissen aber, dass der Wertebereich des Betrags der Sinusfunktion stetig zwischen $[0, 1]$ liegt. Dann gilt aber

$$\max_{x\in[a,b]} \left| tf(x) + \alpha t \int_a^b \sin(u(y))dy \right| \leq t\,|\alpha|\,(b - a) \cdot 1 + t \max_{x\in[a,b]} |f(x)| .$$

Das Maximum der stetigen Funktion f auf dem Intervall $[a, b]$ ist begrenzt. Damit lässt sich eine Konstante $r > 0$ finden, so dass

$$t\,|\alpha|\,(b - a) + t \max_{x\in[a,b]} |f(x)| < r$$

gilt. Es sind alle Bedingungen des Prinzips von Leray–Schauder in der ersten Version erfüllt. Die Existenz einer Lösung des Integrals (4.7) ist bewiesen.

Abschließend ist aber noch die Kompaktheit des Operators $A : C([a, b]) \longrightarrow C([a, b])$ zu beweisen.
Dazu muss nach Definition 2.9 gezeigt werden, dass A stetig ist und beschränkte Mengen in relativ kompakte überführt. Wenn wir uns daran erinnern, dass $f \in C([a, b])$ gilt, so ist die Stetigkeit offensichtlich. Nun wissen wir mit den obigen Ausführungen, dass jedes u der Ausgangsmenge beschränkt ist. Es bleibt also zu zeigen, dass $A(C([a, b]))$ relativ kompakt ist. Nach dem Satz von Arzelà–Ascoli (vgl. [**?**]) ist dies gleichbedeutend damit, dass

- $A(C([a,b]))$ beschränkt ist und
- $A(C([a,b]))$ gleichgradig stetig ist, d. h. für jedes $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für $x, z \in [a,b]$ mit $|x-z| < \delta$ $|(Au)(x) - (Au)(z)| < \epsilon$ folgt.

Die Beschränkheit der Bildmenge ist aber nach obigen Ausführungen ebenfalls offensichtlich. Sei also $x, z \in [a,b]$ und $|x-z| < \delta$. Dann gilt aber auf Grund der Stetigkeit von f

$$\begin{aligned} |(Au)(x) - (Au)(z)| &= \left| f(x) - f(z) + \alpha \int_a^b \sin(u(y))dy - \alpha \int_a^b \sin(u(y))dy \right| \\ &= |f(x) - f(z)| < \epsilon \end{aligned}$$

Damit ist die Kompakheit des Operators A bewiesen.

5 Zusammenfassung und Ausblick

Zu Beginn dieser Arbeit wurde der Fixpunktsatz von Schauder und alle damit verwandten Sätze durch das Ziel einer allgemeinen Lösungsstrategie der Gleichung (1.1)

$$x = Ax$$

motiviert. Dabei wird diese Fixpunktgleichung zunächst als Repräsentant für Problemstellungen aus allen Bereichen der universitären Mathematik aufgefasst. Letztendlich finden sich die Sätze von Schauder jedoch hauptsächlich in einem Gebiet der Mathematik, dem Lösen von Differentialgleichungen, wieder. Daraus resultiert aber keineswegs ein Verlust an Bedeutung der von Juliusz Schauder im frühen zwanzigsten Jahrhundert formulierten Sätze, denn dem Anspruch einer allgemeinen Lösungsmethode der Anfangsgleichung (1.1) werden diese immer noch gerecht.

Das Beispiel zur Anwendung der Leray–Schauder–Alternative kann, so wie viele Veranschaulichungen, die Bedeutung der Schaudersätze in der Mathematik nur exemplarisch zeigen. Anhand des Beispiels aber haben wir gesehen, dass die Sätze rund um den Fixpunktsatz von Schauder mit fundamentalen Umformungen die Existenz von Lösungen einer nichtlinearen Integralgleichung beweisen können, sofern die Kompaktheit eines Operators A gegeben ist. Dies zeigt die Verbindung der Schauder–Theorie mit der Theorie der kompakten Operatoren.
Die Thematik der kompakten Operatoren konnte in dieser Bachelorarbeit auf Grund ihres Umfangs nur tangiert werden. Lediglich die für die Beweise fundamentalen Sätze wurden thematisiert. Die im Literaturverzeichnis angeführten Quellen liefern dem interessiertem Leser weitere Einblicke in die Theorie der kompakten Operatoren.
Diese Bachelorarbeit stellt eine konkrete Aufgabenstellungen als Anwendungsmöglichkeit der Schaudersätze in der Vordergrund, so dass der Eindruck entstehen könnte, diese seien nur für anwendungsorientierte Aufgabenstellungen hilfreich. So scheint die Lösungsmethode der in Kapitel 4.3 thematisierten Integralgleichung zwar interessant, aber zunächst bedeutungslos. Es ist jedoch möglich sich von der speziellen Integralgleichung zu lösen und allgemeine nichtlineare Integralgleichungen zu betrachten. Im Hinblick auf das Lösen von Differentialgleichungen ist es durchaus hilfreich die Existenz von Lösungen zunächst allgemein zu betrachten, um diese Aussagen schließlich auf spezielle Probleme anwenden zu können.
Die in dieser Arbeit formulierten Sätze von Schauder können aber auch genutzt werden, um innermathematische Problemstellungen zu lösen. So kann beispielsweise der Satz von Peano auch mit dem Schauderschen Fixpunktsatz bewiesen werden. Dieser sichert die Existenz von Lösungen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen. Darüber hinaus lassen sich zahlreiche Beispiele gewöhnlicher und partieller Diffe-

rentialgleichungen finden, bei denen die in dieser Arbeit formulierten Sätze ein probartes Mittel und eine Alternative zum Banachschen Fixpunktsatz darstellen, um allgemeine Existenzaussagen zu treffen.

6 Literaturverzeichnis

[1] Alt, Hans–Wilhelm: Lineare Funktionalanalysis: Eine anwendungsoriente Einführung, Springer–Verlag, Berlin, 2006

[2] Appell, Jürgen und Väth, Martin: Elemente der Funktionalanalysis, Vektorräume, Operatoren und Fixpunktsätze, Vieweg, Wiesbaden, 2005

[3] Heuser, Harro: Analysis 2, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2008

[4] Lichtweiß, Kurt: Konvexe Mengen, Springer–Verlag, Berlin, 1979

[5] Naas, Josef und Tutschke, Wolfgang: Große Sätze und schöne Beweise der Mathematik, Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 2009

[6] Růžička, Michael: Nichtlineare Funktionalanalysis: Eine Einführung, Springer–Verlag, Berlin, 2004

[7] Werner, Dirk: Funktionalanalysis, Springer–Verlag, Berlin, 2006

[8] Zeidler, Eberhard: Nonlinear functional analysis and its applications; Band I: Fixed–Point Theorems, Springer–Verlag, New York, 1986

[9] Zeidler, Eberhard: Nonlinear functional analysis and its applications; Band IV: Applications to mathematical physics, Springer–Verlag, New York, 1997

7 Erklärung

Ich versichere hiermit, die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet zu haben.

Bielefeld, August 2010

Jan Frederik Sundermeier