

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN  
INSTITUT FÜR MATHEMATIK

BACHELORARBEIT  
IM STUDIENGANG TECHNOMATHEMATIK

---

**Gebrochene Ableitungen  
und Anwendungen**

---

Dimitri Puhst

betreut von Prof. Dr. Etienne Emmrich

4. April 2010

Die selbstständige und eigenhändige Ausfertigung versichert an Eides statt

Berlin, den

---

(Dimitri Puhst)

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Darstellung gebrochener Ableitungen</b>	<b>2</b>
2.1	Die Gamma-Funktion . . . . .	2
2.2	Darstellung nach Grünwald-Letnikow . . . . .	3
2.3	Darstellung nach Riemann-Liouville . . . . .	7
2.4	Weitere Darstellungen . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Die Laplace-Methode</b>	<b>11</b>
<b>4</b>	<b>Anwendung: Elektrochemie</b>	<b>14</b>
<b>5</b>	<b>Anwendung: Rheologie</b>	<b>17</b>
<b>6</b>	<b>Gebrochene Sobolew-Räume</b>	<b>20</b>
6.1	Grundlagen . . . . .	20
6.2	Sobolew-Slobodezki-Räume I . . . . .	20
6.3	Fourier-Transformation . . . . .	21
6.4	Sobolew-Slobodezki-Räume II . . . . .	23
6.5	Sobolew-Slobodezki-Räume III . . . . .	25
<b>7</b>	<b>Schluss</b>	<b>27</b>
<b>8</b>	<b>Literatur</b>	<b>28</b>

# 1 Einleitung

Mit Ableitungen wird man schon in Schulzeiten vertraut gemacht. Im Physikunterricht wird gelehrt, dass die Geschwindigkeit die Ableitung des Ortes ist, die Beschleunigung die Ableitung der Geschwindigkeit. Im Mathematikunterricht wird erklärt, dass die erste Ableitung einer Funktion gerade ihrer Steigung entspricht, die zweite Ableitung gibt das Vorzeichen der Krümmung an. Im Mathematikstudium wird die Ableitung als lineare Abbildung eingeführt und der Student sieht voller Überraschung, dass die Ableitungen höherdimensionaler Abbildungen nicht mehr Skalare, sondern Matrizen sind. Die zweite Ableitung ist die erste Ableitung der ersten Ableitung, Ableitungen höheren Grades werden also rekursiv definiert, sodass vorerst keine Fragen mehr offen bleiben. Doch immer wird stillschweigend vorausgesetzt, dass Ableitungen ganzzahlig sind, wir reden also von  $d^n/dx^n$  mit  $n \in \mathbb{N}$ .

Dabei hat schon Gottfried Wilhelm Leibniz, der Architekt der Infinitesimalrechnung, auf den die heutige Notation für Integrale  $\int$  (lat. *summa*) und Differentiale  $d$  (lat. *differentia*) zurückgeht, die Frage aufgeworfen, wie denn die halbe Ableitung von  $x$  aussehen würde. In einem Brief an seinen Mathematikerkollegen Guillaume François de l'Hospital schreibt er im September 1695 [LH]:

Ainsi il s'en s[u]it que  $d^{1/2}x$  sera egal à  $x\sqrt{dx/x}$ . Il y a de l'apparence qu'on tirera un jour des consequences bien utiles de ces paradoxes, [...].

Seiner Meinung nach muss das halbe Differential von  $x$  gerade  $x\sqrt{dx/x}$  sein. Er hält das für ein Paradoxon, ist aber überzeugt davon, dass daraus eines Tages nützliche Konsequenzen gezogen werden.

Der Titel dieser Bachelorarbeit lautet *Gebrochene Ableitungen und Anwendungen*. Dabei könnte das Wort Ableitungen auch durch Infinitesimalrechnung ersetzt werden, denn im gebrochenen Sinne hängen Ableitungen und Integrale stärker zusammen als im ganzzahligen Fall.

In der Arbeit wird zuerst damit begonnen zu erklären, was man sich unter einer gebrochenen Ableitung und einem gebrochenen Integral vorstellen kann. Was bedeutet  $d^{-1}/dx^{-1}$ ? Und was ist die  $\pi$ -te Ableitung einer Funktion? Mit der Zeit hat es verschiedenste Definitionen dafür gegeben, die alle ihre Vor- und Nachteile haben. Hier werden jedoch nur zwei Definitionen gebracht, einmal die Darstellung nach Grünwald und Letnikow, die sehr konstruktiv ist, und anschließend die Darstellung benannt nach Riemann und Liouville. Diese hat sich in heutiger Zeit durchgesetzt und ist somit *die* Definition gebrochener Ableitung und Integrale.

In den Kapiteln 4 und 5 werden zwei Anwendungen vorgestellt. Sowohl bei der Anwendung aus der Elektrochemie als auch der aus der Rheologie hat Leibniz recht behalten: die gebrochene Infinitesimalrechnung findet Möglichkeiten Prozesse zu beschreiben, die den vorherigen Methoden ausblieben. Doch Leibniz musste lange Zeit warten, bis sich seine Prophezeiung bewahrheiten sollte. Über zwei Jahrhunderte lang wurden gebrochene Ableitungen und Integrale nur aus dem Trieb reiner Neugierde untersucht, praktische Anwendungen aus der Realität sind erst seit ca. 50 Jahren bekannt.

Abgesehen von den beiden in dieser Arbeit vorgestellten Anwendungen hat sich insbesondere im Bereich der theoretischen Physik die gebrochene Differentialrechnung als vorteilhaft erwiesen. So wird beispielsweise die fraktionale Wellengleichung betrachtet, es wird der Frage nach fraktionaler Reibung nachgegangen und, im Bereich der Quantenmechanik, wird die fraktionale Schrödingergleichung untersucht [Herr]. Das Prozedere sieht meistens gleich aus: in naturbeschreibenden Differentialgleichungen wird die Zeitableitung durch eine gebrochene Ableitung ersetzt, in vielen Fällen stimmt dann die Theorie mit experimentellen Ergebnissen besser überein als zuvor.

Im letzten Kapitel werden gebrochene Sobolew-Räume mit der Motivation betrachtet, eine Verbindung zwischen der Slobodezki-Halbnorm und der Darstellung einer gebrochenen Ableitung in der  $L^2$ -Norm zu finden. Dabei werden die gebrochenen Sobolew-Räume neben dem klassischen Zugang noch auf zwei weitere Arten eingeführt: über Fourier-Transformation und über Rauminterpolation.

## 2 Darstellung gebrochener Ableitungen

### 2.1 Die Gamma-Funktion

Bevor die Darstellung gebrochener Ableitungen diskutiert wird, muss zunächst eine Funktion eingeführt werden, die als Erweiterung der Fakultätsfunktion gesehen werden kann. Sie ist essentieller Bestandteil der meisten Darstellungsweisen und besitzt einige bemerkenswerte Eigenschaften, die im Folgenden erörtert werden.

**Definition 2.1.** Die Abbildung  $\Gamma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  mit

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

heißt *Gamma-Funktion*.

Hierbei sichert  $x > 0$  die Existenz des Integrals [Pod]. Wäre man im Raum der komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$ , so müsste die Bedingung  $\Re(x) > 0$  heißen. In dieser Arbeit soll aber nur  $x \in \mathbb{R}$  betrachtet werden.

Die wichtigste Eigenschaft der Gamma-Funktion ist diejenige, welche sie als Erweiterung der Fakultätsfunktion charakterisiert. Denn für  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x > 0$  gilt mit partieller Integration

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt = [-e^{-t} t^x]_{t=0}^{\infty} + x \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = x\Gamma(x). \quad (2.1)$$

Folglich gilt  $\Gamma(n+1) = n!$  für  $n \in \mathbb{N}$ , womit die Charakterisierung sinnvoll ist. Es gibt noch eine weitere Beschreibung der Gamma-Funktion, denn es gilt

**Satz 2.1.** Sei  $x > 0$ . Dann gilt

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \dots (x+n)}.$$

*Beweis.* Mit der Hilfsfunktion  $f_n(x) = \int_0^n (1 - \frac{t}{n})^n t^{x-1} dt$  und der Substitution  $\tau = \frac{t}{n}$ ,  $dt = n d\tau$  folgt

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \int_0^1 (1-\tau)^n n^x \tau^{x-1} d\tau \\ &= \left[ \frac{n^x}{x} (1-\tau)^n \tau^x \right]_{\tau=0}^1 + \int_0^1 (1-\tau)^{n-1} \frac{n^x n}{x} \tau^x d\tau = \frac{n^x n}{x} \int_0^1 (1-\tau)^{n-1} \tau^x d\tau \\ &= \frac{n^x n(n-1)}{x(x+1)} \int_0^1 (1-\tau)^{n-2} \tau^{x+1} d\tau \\ &= \dots \\ &= \frac{n^x n!}{x(x+1) \dots (x+n-1)} \int_0^1 \tau^{x+n-1} d\tau = \frac{n^x n!}{x(x+1) \dots (x+n)}. \end{aligned}$$

Da Grenzwertbildung und Integration vertauscht werden dürfen [Pod], gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n (1 - \frac{t}{n})^n t^{x-1} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

q.e.d.

Aus dieser Darstellung ist leicht abzulesen, dass der Kehrwert der Gamma-Funktion  $\frac{1}{\Gamma(x)}$  die Nullstellen  $x = 0, -1, -2, \dots$  hat. Außerdem hat sie den Vorteil, dass der Definitionsbereich nicht mehr durch  $x > 0$  restringiert wird. Demnach gilt die eben bewiesene Form für alle  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq 0, -1, -2, \dots$

Für die Gamma-Funktion können nun viele Formeln und Eigenschaften bewiesen werden, die nicht Gegenstand dieser Arbeit sein sollen. So gilt zum Beispiel, falls  $0 < x < 1$  ist,  $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$  [Pod], und demnach  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ . Von großem Interesse ist die Erweiterung des Binomialkoeffizienten auf reelle (komplexe) Zahlen. Sie erlangt Anwendung in späteren Darstellungen.

Es ist bereits bekannt, dass für  $a, b \in \mathbb{N}$

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(b+1)\Gamma(a-b+1)}$$

gilt. Mithilfe der Gamma-Funktion steht einer Erweiterung nichts mehr im Wege. Somit ist für  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  der Binomialkoeffizient definiert als

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\beta + 1)\Gamma(\alpha - \beta + 1)}. \quad (2.2)$$

Eine weitere Erweiterung kann an der Exponentialfunktion durchgeführt werden. Wird die Gamma-Funktion auf die Reihendarstellung  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(n+1)}$  angewandt, so ergeben sich die Mittag-Leffler-Funktion

$$E_{\alpha}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(\alpha n + 1)}, \quad \alpha > 0,$$

sowie die zweiparametrische Mittag-Leffler-Funktion

$$E_{\alpha, \beta}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}, \quad \alpha, \beta > 0.$$

Zur Illustration der Sinnhaftigkeit dieser Definition folgen fünf Beispiele, bei denen bereits bekannte Funktionen mit der Mittag-Leffler-Funktion beschrieben werden:

$$\begin{aligned} E_{1,1}(x) &= e^x, \\ E_{1,2}(x) &= \frac{e^x - 1}{x}, \\ E_{2,1}(x^2) &= \cosh(x), \\ E_{2,2}(x^2) &= \frac{\sinh(x)}{x} \text{ und} \\ E_{1,m}(x) &= \frac{1}{x^{m-1}} \left( e^x - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{x^k}{k!} \right) \text{ für } m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

## 2.2 Darstellung nach Grünwald-Letnikow

Im Folgenden soll eine Darstellung für gebrochene Ableitungen hergeleitet werden. Sie ist konstruktiv und dient insbesondere der Veranschaulichung des Zusammenhangs zwischen Differentiation und Integration. Ihren Namen hat sie von den Mathematikern Anton Karl Grünwald und Aleksej Vasiliewitsch Letnikow, die ihre Arbeiten bereits im 19. Jahrhundert veröffentlichten.

Sei  $f \in C^1(\mathbb{R})$ . So ist die erste Ableitung gerade der Grenzwert des Differenzenquotienten

$$\frac{df}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h}.$$

Für die zweite Ableitung gilt dann, falls  $f \in C^2(\mathbb{R})$ ,

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2},$$

und falls  $f \in C^n(\mathbb{R})$  gilt für die  $n$ -te Ableitung die Formel

$$\frac{d^n f}{dt^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} f(t-rh). \quad (2.3)$$

Hierbei ist  $\binom{n}{r}$  der gewöhnliche Binomialkoeffizient. Betrachtet man von (2.3) die Erweiterung

$$f_h^{(p)}(t) = \frac{1}{h^p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} f(t-rh) \quad (2.4)$$

mit  $p \in \mathbb{N}$  beliebig, so ist sofort klar, dass  $\lim_{h \rightarrow 0} f_h^{(p)}(t) = \frac{d^p f}{dt^p}$ , falls  $0 < p \leq n$ , denn der Binomialkoeffizient  $\binom{p}{r}$  ist Null für alle  $r > p$ .

Um negative Werte von  $p$  betrachten zu können, soll folgende Notation eingeführt werden:

$$\left[ \begin{matrix} p \\ r \end{matrix} \right] = \frac{p(p+1) \dots (p+r-1)}{r!}. \quad (2.5)$$

Mit (2.5) kann der Binomialkoeffizient für negative  $p$  beschrieben werden als

$$\left( \begin{matrix} -p \\ r \end{matrix} \right) = \frac{-p(-p-1) \dots (-p-r+1)}{r!} = (-1)^r \left[ \begin{matrix} p \\ r \end{matrix} \right],$$

und somit ergibt sich für (2.4), falls  $p < 0$  durch  $-p$  mit  $p \in \mathbb{N}$  ersetzt wird,

$$f_h^{(-p)}(t) = h^p \sum_{r=0}^n \left[ \begin{matrix} p \\ r \end{matrix} \right] f(t-rh).$$

Falls  $n$  nun fest bliebe und  $h$  gegen 0 konvergierte, so wäre  $\lim_{h \rightarrow 0} f_h^{(-p)}(t) = 0$ . Dies ist nicht im Interesse dieser Herleitung. Es wird benötigt, dass sowohl  $h$  gegen 0 als auch  $n$  gegen  $\infty$  konvergiert. Diese Bedingung ist erfüllt für  $h = \frac{t-a}{n}$  für ein  $a \in \mathbb{R}$ .

Nun kann dank dieser Überlegungen ein Operator definiert werden. Es wird sich herausstellen, dass dieser gerade der  $p$ -fachen Integration für  $p \in \mathbb{N}$  entspricht und auf  $p \in \mathbb{R}$  erweitert werden kann.

**Definition 2.2.** Für  $p \in \mathbb{Z}$ , ein  $a \in \mathbb{R}$  und  $f \in C([a, t])$  falls  $p$  negativ,  $f \in C^p([a, t])$  falls  $p$  positiv, sei

$${}_a D_t^p f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} f_h^{(p)}(t).$$

Für positive  $p$  entspricht der Operator gerade der  $p$ -ten Ableitung von  $f(\cdot)$ . Doch was leistet diese Definition für negative  $p$ ? Dazu betrachte man ein paar Beispiele. Sei  $p = -1$ , so gilt

$${}_a D_t^{-1} f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} f_h^{(-1)}(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h \sum_{r=0}^n f(t-rh) = \int_0^{t-a} f(t-x) dx = \int_a^t f(\tau) d\tau.$$

Hierbei wurde die Substitution  $\tau = t-x$  benutzt. Sei nun  $p = -2$ . Dann ist  $\left[ \begin{matrix} 2 \\ r \end{matrix} \right] = r+1$  und mit der Substitution  $y = t+rh$  folgt

$$f_h^{(-2)}(t) = h^2 \sum_{r=0}^n (r+1) f(t-rh) = h \sum_{r=1}^{n+1} (rh) f(t-(r-1)h) = h \sum_{r=1}^{n+1} (rh) f(y-rh)$$

und für  $h \rightarrow 0$  und demnach  $y \rightarrow t$  erhält man

$${}_a D_t^{-2} f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} f_h^{(-2)}(t) = \int_0^{t-a} x f(t-x) dx = \int_a^t (t-\tau) f(\tau) d\tau.$$

Auf gleiche Art und Weise wird  ${}_a D_t^{-3} f(t) = \frac{1}{2} \int_a^t (t-\tau)^2 f(\tau) d\tau$  berechnet. Dies motiviert folgendes Lemma.

**Lemma 2.1.** Sei  $p \in \mathbb{N}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  und  $f \in C([a, t])$ . Dann gilt die Formel

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} f_h^{(-p)}(t) = \frac{1}{(p-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau.$$

*Beweis.* Der Beweis erfolgt durch Induktion über  $p$ . Der Induktionsanfang wurde bereits gezeigt, es bleibt der Induktionsschluss von  $p$  auf  $p+1$  zu zeigen. Hierzu sei  $F(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau$ ,  $F(a) = 0$  eine Stammfunktion

von  $f$ . Daher ist  $f(t - rh) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(t-th) - F(t-(r+1)h)}{h}$  und deswegen gilt

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{-(p+1)} f(t) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^{p+1} \sum_{r=0}^n \binom{p+1}{r} f(t - rh) \\ &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^n \binom{p+1}{r} F(t - rh) - \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^n \binom{p+1}{r} F(t - (r+1)h). \end{aligned}$$

Verwendet man  $\binom{p+1}{r} = \binom{p}{r} + \binom{p+1}{r-1}$  in der ersten Summe, setzt  $\binom{p+1}{-1} := 0$  und ersetzt  $r$  durch  $r-1$  in der zweiten, so folgt

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{-(p+1)} f(t) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^n \binom{p}{r} F(t - rh) + \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^n \binom{p+1}{r-1} F(t - rh) \\ &\quad - \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=1}^{n+1} \binom{p+1}{r-1} F(t - rh) \\ &= {}_a D_t^{-p} F(t) - \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \binom{p+1}{n} F(t - (n+1)h) \\ &= {}_a D_t^{-p} F(t) - (t-a)^p \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{p+1}{n} \frac{1}{n^p} F\left(a - \frac{t-a}{n}\right). \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde benutzt, dass  $t - (n+1)h = t - (n+1)\frac{t-a}{n} = a - \frac{t-a}{n}$  ist. Es gilt weiterhin

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{p+1}{n} \frac{1}{n^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(p+1)(p+2)\dots(p+n)}{n^p n!} = \frac{1}{\Gamma(p+1)}$$

und mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} F\left(a + \frac{t-a}{n}\right) = F(a) = 0$  folgt

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{-(p+1)} f(t) &= {}_a D_t^{-p} F(t) \\ &= \frac{1}{(p-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} F(\tau) d\tau \\ &= \left[ -\frac{(t-a)^p F(\tau)}{p!} \right]_a^t + \frac{1}{p!} \int_a^t (t-\tau)^p f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

q.e.d.

Dass die eben bewiesene Formel gerade der  $p$ -fachen Integration von  $f$  entspricht, erklärt die *Cauchy-Formel für mehrfache Integration*:

**Satz 2.2.** Sei  $f \in L^1(a, \infty)$  für ein  $a \in \mathbb{R}$ . Dann gilt für  $n \in \mathbb{N}$  und  $t \geq a$

$$\int_a^t \int_a^{\tau_1} \dots \int_a^{\tau_{n-1}} f(\tau_n) d\tau_n \dots d\tau_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau.$$

*Beweis.* Der Beweis folgt mit vollständiger Induktion über  $n$ . Der Induktionsanfang mit  $n=1$  ist trivial. Für den Induktionsschluss von  $n-1$  auf  $n$  sei  $F(\tau) = \int_c^\tau f(x) dx$  mit  $c \geq a$ . Dann gilt mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau &= \left[ \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} F(\tau) \right]_{\tau=a}^t + \frac{1}{(n-2)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-2} F(\tau) d\tau \\ &\stackrel{\text{I.V.}}{=} \left( -\frac{(t-a)^{n-1}}{(n-1)!} F(a) \right) + \int_a^t \int_a^{\tau_1} \dots \int_a^{\tau_{n-2}} F(\tau_{n-1}) d\tau_{n-1} \dots d\tau_1 \\ &= \int_a^t \int_a^{\tau_1} \dots \int_a^{\tau_{n-2}} -F(a) d\tau_{n-1} \dots d\tau_1 + \int_a^t \int_a^{\tau_1} \dots \int_a^{\tau_{n-2}} F(\tau_{n-1}) d\tau_{n-1} \dots d\tau_1 \\ &= \int_a^t \int_a^{\tau_1} \dots \int_a^{\tau_{n-1}} f(\tau_n) d\tau_n \dots d\tau_1 \end{aligned}$$

q.e.d.

Es ist also gezeigt, dass die Formel

$${}_a D_t^p f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} \frac{1}{h^p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} f(t-rh) \quad (2.6)$$

für  $p = m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , der  $m$ -ten Ableitung und für  $p = -m$  der  $m$ -fachen Integration entspricht.

Dank des Binomialkoeffizienten für reelle Zahlen (2.2) kann nun betrachtet werden, wie sich (2.6) für  $p \in \mathbb{R}$  verhält.

**Definition 2.3.** Sei  $p \in \mathbb{R}^+$  und  $m = [p]$ . Dann ist die gebrochene Integration nach Grünwald-Letnikow für  $f \in C([a, t])$  definiert als

$${}_a D_t^{(-p)} f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^n \binom{p}{r} f(t-rh)$$

und die gebrochene Ableitung nach Grünwald-Letnikow für  $f \in C^{m+1}([a, t])$  ist

$${}_a D_t^p f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} \frac{1}{h^p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} f(t-rh).$$

Dass der Limes sowohl bei Integration als auch bei Differentiation existiert, ist in [Pod] mit einem Folgenargument gezeigt.

**Satz 2.3.** Sei  $p \in \mathbb{R}^+$  und  $m = [p]$ . Für  $f \in C^{m+1}([a, t])$  gilt die Grünwald-Letnikow-Darstellung

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{(-p)} f(t) &= \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{p+k}}{\Gamma(p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{p+m} f^{m+1}(\tau) d\tau, \\ {}_a D_t^p f(t) &= \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{-p+m} f^{m+1}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

*Beweis.* Der Beweis soll hier nur für die gebrochene Integration geführt werden. Die Darstellung der Differentiation ist ebenfalls mit bereits erwähntem Folgenargument zu zeigen und nachzulesen in [Pod].

Es wurde bereits gezeigt, dass für eine stetige Funktion  $f$  die Darstellung

$${}_a D_t^{(-p)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau$$

gilt. Unter den Voraussetzungen an  $f$  kann nun wiederholt partielle Integration durchgeführt werden, und es folgt

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{(-p)} f(t) &= \left[ -\frac{1}{\Gamma(p)p} f(\tau)(t-\tau)^p \right]_{\tau=a}^t - \frac{1}{\Gamma(p)p} \int_a^t (t-\tau)^p (-1) f'(\tau) d\tau \\ &= \frac{f(a)(t-a)^p}{\Gamma(p+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_a^t (t-\tau)^p f'(\tau) d\tau \\ &= \dots \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{(p+k)}}{\Gamma(p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{p+m} f^{(m+1)}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

q.e.d.

Die Grünwald-Letnikow-Darstellung ist linear, denn es gilt für  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  und  $f, g$  entsprechend der Definition 2.3:

$$\begin{aligned} {}_a D_t^p (\lambda f(t) + \mu g(t)) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} \frac{1}{h^p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} (\lambda f(t-rh) + \mu g(t-rh)) \\ &= \lambda \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} \frac{1}{h^p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} f(t-rh) + \mu \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} \frac{1}{h^p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} g(t-rh) \\ &= \lambda {}_a D_t^p f(t) + \mu {}_a D_t^p g(t). \end{aligned}$$

Desweiteren kann untersucht werden, unter welchen Bedingungen  ${}_aD_t^p$  mit  ${}_aD_t^q$  kommutiert oder selbstinvers ist, also wann  ${}_aD_t^p \circ {}_aD_t^{-p}$  die Identität ist. Außerdem kann eine Verallgemeinerung der Leibnizregel (Produktregel) für gebrochene Differentiation bewiesen werden. In beiden Fällen sei hierzu auf [Pod] verwiesen.

### 2.3 Darstellung nach Riemann-Liouville

Die Darstellung der Ableitung als Grenzwert ist unhandlich und nicht zufriedenstellend. Die explizite Darstellung (Satz 2.3) sieht zwar wegen des Integralterms eleganter aus, allerdings stört der Nichtintegralterm. Außerdem ist der Gültigkeitsbereich für die Grünwald-Letnikow-Ableitung  $f \in C^{m+1}$  sehr restriktiv. Abhilfe leistet hier die Definition einer gebrochenen Ableitung nach dem deutschen Mathematiker Bernhard Riemann und dem französischen Mathematiker Joseph Liouville. Sie ist die geläufigste Form gebrochener Differentiale.

Um diese Darstellung sinnvoll herzuleiten, wird das gleiche Prozedere wie bei der Herleitung der Grünwald-Letnikow-Darstellung durchgeführt. Zuerst werden die ganzzahlige Ableitung und die ganzzahlige Integration in einem Begriff zusammengefasst, anschließend wird dieser auf die reellen Zahlen erweitert.

Sei  $f$  integrierbar. Dann ist für  $n \in \mathbb{N}$  die  $n$ -fache Integration oder auch  $n$ -fache Antibleitung definiert über

$$f^{(-n)}(t) = \int_a^t \int_a^{\tau_1} \dots \int_a^{\tau_{n-1}} f(\tau_n) d\tau_n \dots d\tau_1$$

und es gilt die Cauchy-Formel für  $n$ -fache Integration (Satz 2.2)

$$f^{(-n)}(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau. \tag{2.7}$$

Sei nun  $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$  und  $k \in \mathbb{Z}$ . Dann kann (2.7) erweitert werden zu

$$f^{(k-n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} D^k \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau. \tag{2.8}$$

Hierbei ist  $D^k$  für positive  $k$  als  $k$ -te Ableitung und für negative  $k$  als  $k$ -fache Integration zu verstehen. Es gilt also für (2.8) die Beziehung:

$$\begin{aligned} k = n-1, n-2, \dots, n-m, \dots & \quad f^{(k-n)} \text{ ist } m\text{-fache Integration} \\ k = n & \quad f^{(k-n)} = f \\ k = n+1, n+2, \dots, n+m, \dots & \quad f^{(k-n)} \text{ ist } m\text{-fache Ableitung} \end{aligned}$$

Diese Formel lässt sich nun auf natürliche Weise auf die reellen Zahlen erweitern. Zuerst soll die gebrochene Integration betrachtet werden. Dazu sei  $p \in \mathbb{R}$  mit  $p > 0$ . Um die  $p$ -fache Integration zu definieren, ersetze man in (2.7)  $n$  durch  $p$  und erhalte die Definition:

**Definition 2.4.** Das Riemann-Liouville-Integral für  $p \in \mathbb{R}^+$  und  $f \in L^1(a, t)$  ist definiert als

$${}_a\mathbb{D}_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau.$$

Dieser Ausdruck existiert, falls  $p > 0$  ist. Allerdings gilt  $\lim_{p \rightarrow 0} {}_a\mathbb{D}_t^{-p} f(t) = f(t)$ , deswegen kann  ${}_a\mathbb{D}_t^0 f(t) = f(t)$  gesetzt werden. Dass der Ausdruck gegen  $f$  konvergiert, erkennt man für  $f \in C^1$  sehr einfach, ansonsten sei auf [Pod] verwiesen. Es gilt

$$\begin{aligned} {}_a\mathbb{D}_t^{-p} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(p)} \left\{ \left[ \frac{-(t-\tau)^p}{p} f(\tau) \right]_{\tau=a}^t + \int_a^t \frac{(t-\tau)^p}{p} f'(\tau) d\tau \right\} \\ &= \frac{f(a)(t-a)^p}{\Gamma(p+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_a^t (t-\tau)^p f'(\tau) d\tau \rightarrow f(a) + \int_a^t f'(\tau) d\tau \\ &= f(t) \end{aligned}$$

Um die gebrochene Ableitung zu definieren, nehme man (2.8) und ersetze  $n$  durch  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $k - \alpha > 0$ , so ergibt sich

$${}_a\mathbb{D}_t^{k-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

Daraus folgt die Definition:

**Definition 2.5.** Die Riemann-Liouville-Ableitung für  $p \in \mathbb{R}^+$  und  $m = [p]$  ist definiert durch

$${}_a\mathbb{D}_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-p+1)} \frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f(\tau) d\tau.$$

Offenbar reicht auch für diese Definition aus, dass  $f \in L^1$  ist. Umso schöner ist, dass die Riemann-Liouville-Ableitung unter den Voraussetzungen des Satzes 2.3 mit der Grünwald-Letnikow-Ableitung übereinstimmt (siehe Satz 2.4).

Aus der Definition folgt, dass die gebrochene Ableitung auch geschrieben werden kann als

$${}_a\mathbb{D}_t^p f(t) = \frac{d^k}{dt^k} \left( {}_a\mathbb{D}_t^{-(k-p)} f(t) \right).$$

Interpretiert man diese Gleichung, so ist die gebrochene Ableitung nach Riemann-Liouville eine Hintereinanderschaltung von gebrochener Integration und ganzzahliger Differentiation. Demzufolge ist die gebrochene Differentiation nur eine geschickte Rückführung auf gebrochene Integration.

Ist  $p$  ganzzahlig, also  $p = k - 1$  bzw.  $p = k$ , so gilt

$$\begin{aligned} {}_a\mathbb{D}_t^{k-1} f(t) &= \frac{d^k}{dt^k} {}_a\mathbb{D}_t^{-1} f(t) = f^{(k-1)}(t) \\ {}_a\mathbb{D}_t^k f(t) &= \frac{d^k}{dt^k} {}_a\mathbb{D}_t^0 f(t) = f^{(k)}(t). \end{aligned}$$

Folglich ist die Riemann-Liouville-Ableitung eine Interpolation der gewöhnlichen Ableitung.

Nun sollen noch kurz einige Eigenschaften der Riemann-Liouville-Darstellung für gebrochene Differentiation und Integration erwähnt werden.

**Satz 2.4.** Sei  $p \in \mathbb{R}^+$ ,  $m = [p]$  sowie  $f \in C^{m+1}([a, t])$ . Dann gilt

$${}_a\mathbb{D}_t^p f(t) = {}_aD_t^p f(t).$$

*Beweis.* In diesem Beweis werden abwechselnd partielle Integration und Differentiation angewandt.

$$\begin{aligned} \Gamma(m-p+1) {}_a\mathbb{D}_t^p f(t) &= \frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}} \left\{ \left[ -\frac{(t-\tau)^{m-p+1} f(\tau)}{m-p+1} \right]_{\tau=a}^t + \int_a^t \frac{1}{m-p+1} (t-\tau)^{m-p+1} f'(\tau) d\tau \right\} \\ &= \frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}} \left\{ \frac{f(a)(t-a)^{m-p+1}}{m-p+1} + \int_a^t \frac{(t-\tau)^{m-p+1}}{m-p+1} f'(\tau) d\tau \right\} \\ &= \frac{d^m}{dt^m} \left\{ f(a)(t-a)^{m-p} + \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f'(\tau) d\tau \right\} \\ &= \frac{d^m}{dt^m} \left\{ f(a)(t-a)^{m-p} + \frac{f'(a)(t-a)^{m-p+1}}{m-p+1} + \int_a^t \frac{(t-\tau)^{m-p+1}}{m-p+1} f''(\tau) d\tau \right\} \\ &= \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} \left\{ (m-p)f(a)(t-a)^{m-p-1} + f'(a)(t-a)^{m-p} + \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f''(\tau) d\tau \right\} \\ &= \dots \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(-p+1+k)} \Gamma(m-p+1) + \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Mit  $\Gamma(m-p+1) = (m-p)\Gamma(m-p) = (m-p)(m-p-1)\dots(1-p)\Gamma(1-p)$  ist der letzte Schritt leicht nachzuvollziehen. q.e.d.

Wie nicht anders zu erwarten ist die Riemann-Liouville-Darstellung linear:

$$\begin{aligned} {}_a\mathbb{D}_t^p(\lambda f(t) + \mu g(t)) &= \frac{1}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-\tau)^{k-p-1} (\lambda f(t) + \mu g(t)) d\tau \\ &= \lambda \frac{1}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-\tau)^{k-p-1} f(t) d\tau + \mu \frac{1}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-\tau)^{k-p-1} g(t) d\tau \\ &= \lambda {}_a\mathbb{D}_t^p f(t) + \mu {}_a\mathbb{D}_t^p g(t). \end{aligned}$$

Hierbei war  $k-1 \leq p < k$ . Desweiteren können auch bei dieser Darstellung Bedingungen hergeleitet werden, unter welchen  ${}_a\mathbb{D}_t^p f(t)$  mit  ${}_a\mathbb{D}_t^q f(t)$  kommutiert bzw. selbstinvers ist. Die schon zur Grünwald-Letnikow-Darstellung erwähnte Verallgemeinerung der Leibnizregel für gebrochene Differentiation behält auch für die Riemann-Liouville-Darstellung ihre Gültigkeit. Diese Eigenschaften können ebenfalls in [Pod] nachgeschlagen werden.

## 2.4 Weitere Darstellungen

Im Bereich der gebrochenen Infinitesimalrechnung gibt es eine Vielzahl von Darstellungsweisen. Im Folgenden sollen noch weitere genannt werden. Die Darstellung nach Caputo ist leicht aus der Riemann-Liouville-Darstellung abzuleiten und findet aufgrund ihrer Beschaffenheit heutzutage immer noch Anwendung. Anschließend wird eine Methode vorgestellt, die bisher eingeführten Darstellungen etwas anders zu definieren. Zuletzt wird die Fourier-Darstellung betrachtet. Sie unterscheidet sich erheblich von den bereits vorgestellten Darstellungen. Sie ist besonders schlicht und dennoch sehr elegant, und sie hat einen sehr speziellen Vorteil, auf den in Kapitel 6 noch näher eingegangen wird.

### Caputo

Die Riemann-Liouville-Darstellung von gebrochenen Ableitungen beruht auf gebrochener Integration und anschließender ganzzahliger Differentiation. Bei der Darstellung von Caputo wird nun die Reihenfolge vertauscht: es wird erst ganzzahlig differenziert und anschließend gebrochen integriert. Demnach sieht die Caputo-Ableitung für ein  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha > 0$  wie folgt aus.

$${}_a^C\mathbb{D}_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau, \quad n-1 < \alpha < n \in \mathbb{N}. \quad (2.9)$$

Aufgrund des äußeren Integrals wird die Caputo-Darstellung bei Anfangsrandwertproblemen benutzt.

### In die Zukunft

Bisher wurden sämtliche Ableitungsdarstellungen mit fester unterer Grenze  $a \in \mathbb{R}$  und fortschreitender oberer Grenze  $t$  betrachtet. Das heißt, dass diese linkseitigen Ableitungen mit Blick in die Vergangenheit definieren. Alle drei bisher gesehenen gebrochenen Differentiale können aber auch rechtsseitig definiert werden, d.h. mit Blick in die Zukunft. Für die Riemann-Liouville-Darstellung hätte man dann beispielsweise

$${}_t\mathbb{D}_\beta^p f(t) = \frac{(-1)^{m+1}}{\Gamma(m-p+1)} \frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}} \int_t^\beta (\tau-t)^{m-p} f(\tau) d\tau, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

### Fourier

Da die Fourier-Transformation in Kapitel 6 genauer untersucht werden soll, wird jetzt keine genaue Theorie betrachtet. Ohne zu sagen wann dies gilt, sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  nun als Rücktransformation seiner Fourier-Transformation darstellbar, das heißt

$$f(x) = \mathfrak{F}^{-1} \mathfrak{F} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{F} f(\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

Dann gilt für die erste Ableitung von  $f$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (i\xi) \mathfrak{F} f(\xi) e^{i\xi x} d\xi = \mathfrak{F}^{-1} \{ (i\xi) \mathfrak{F} f(\xi) \} (x)$$

und somit für die  $n$ -te Ableitung,  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) = \mathfrak{F}^{-1}\{(i\xi)^n \mathfrak{F}f(\xi)\}(x). \quad (2.10)$$

Dadurch kann (2.10) auf den Bereich der reellen Zahlen erweitert werden, sodass sich die folgende Darstellung nach Fourier für gebrochene Ableitungen bzw. Integration ergibt. Für  $p \in \mathbb{R}$  gilt

$$\frac{d^p}{dx^p} f(x) = \mathfrak{F}^{-1}\{(i\xi)^p \mathfrak{F}f(\xi)\}(x). \quad (2.11)$$

Diese Darstellung soll mit  $D_F^p$  bezeichnet werden. Sie ist keineswegs willkürlich, da mit Überlegungen ähnlich jenen aus dem Kapitel über die Laplace-Transformation folgt, dass falls die untere Integrationsgrenze  $a = -\infty$  ist, die Fourier-Transformation eines Riemann-Liouville-Integrals die Form

$$\mathfrak{F}({}_{-\infty}\mathbb{D}_x^{-p}f)(\xi) = (i\xi)^{-p} \mathfrak{F}f(\xi)$$

und die Fourier-Transformation einer Riemann-Liouville-Ableitung die Form

$$\mathfrak{F}({}_{-\infty}\mathbb{D}_x^p f)(\xi) = (i\xi)^p \mathfrak{F}f(\xi)$$

besitzt (siehe [Pod]). Die Argumente ähneln jenen von der Laplace-Transformation, da beide Transformationen eng miteinander verwandt sind.

### 3 Die Laplace-Methode

In diesem Abschnitt soll die Laplace-Transformation vorgestellt werden. Mit ihrer Hilfe lassen sich einige fraktionale Differentialgleichungen, also Gleichungen, in denen eine gebrochene Zeitableitung vorkommt, auf elegante Art und Weise lösen.

Die Laplace-Transformation dient dazu, Funktionen aus dem reellen Zeitbereich in den komplexen Frequenzbereich zu überführen. 1782 entwickelte Pierre-Simon Laplace die Transformation, um Wahrscheinlichkeitsstudien durchzuführen. Erst mehr als hundert Jahre später entdeckte der deutsche Mathematiker Gustav Doetsch den Nutzen der Transformation zur Lösung von Differentialgleichungen.

**Definition 3.1.** Für  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  heißt

$$\bar{f}(s) = \mathcal{L}f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Laplace-Transformierte von  $f$ .

Das Integral existiert für alle  $s$  mit  $\Re(s) > a$ , falls  $f(\cdot)$  stückweise stetig ist und der Wachstumsbedingung

$$|f(t)| \leq Me^{at} \quad \forall t > t_0$$

für ein  $M > 0$ ,  $t_0 > 0$  und  $a > 0$  genügt. Weiterhin existieren hinreichende Bedingungen, sodass die Laplace-Rücktransformation

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\bar{f}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} \bar{f}(s) ds, \quad c = \Re(s) > a$$

existiert. Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn die Funktion  $f(\cdot)$  stetig differenzierbar ist. Allerdings ist die Rücktransformation sehr unhandlich und schwer zu berechnen, deswegen wird meist mit Transformationstabellen gearbeitet, in denen die Laplace-Transformierte für häufig vorkommende und wichtige Funktionen bereits verzeichnet ist.

Wichtig für diese Arbeit sind die zwei folgenden Eigenschaften. Die erste beschreibt die Laplace-Transformation einer Faltung

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau,$$

die zweite liefert eine für Ableitungen.

**Lemma 3.1.** Existieren für  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  die Laplace-Transformationen und seien  $f$  und  $g$  auf  $\mathbb{R}$  mit Null fortgesetzt, so gilt

$$\mathcal{L}(f * g)(s) = \mathcal{L}f(s)\mathcal{L}g(s).$$

Ist die Funktion  $f$  weiterhin  $n$  mal differenzierbar für  $n \in \mathbb{N}$  und die Laplace-Transformierten der  $k$ -ten Ableitungen existieren für  $k = 1 \dots n-1$ , so gilt

$$\mathcal{L}f^{(n)}(s) = s^n \bar{f}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) = s^n \bar{f}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0).$$

*Beweis.* Zur ersten Aussage:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}f(s)\mathcal{L}g(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \int_0^{\infty} e^{-s\tau} g(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-s(t+\tau)} f(t)g(\tau) d\tau dt \\ &= \int_0^{\infty} \int_t^{\infty} e^{-s\tau} f(t)g(\tau-t) d\tau dt = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-s\tau} f(t)g(\tau-t) d\tau dt. \end{aligned}$$

In der letzten Zeile wurde zuerst die Substitution  $\tau \rightarrow \tau - t$  durchgeführt, anschließend wurde die Fortsetzung von  $g$  auf  $\mathbb{R}$  ausgenutzt. Somit folgt mit Vertauschung der Integration

$$\mathcal{L}f(s)\mathcal{L}g(s) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-s\tau} f(t)g(\tau-t) dt d\tau = \int_0^{\infty} e^{-s\tau} \int_0^{\tau} f(t)g(\tau-t) dt d\tau = \mathcal{L}(f * g)(s).$$

Um die zweite Aussage zu beweisen, zeigt man mit partieller Integration

$$\mathcal{L}f'(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt = \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left\{ [e^{-st} f(t)]_{t=\delta}^{\omega} + s \int_{\delta}^{\omega} e^{-st} f(t) dt \right\} = s\mathcal{L}f(s) - f(0).$$

Der Rest folgt mit Induktion.

q.e.d.

Mithilfe dieses Lemmas lässt sich mit scharfem Blick zumindest schon eine Formel für die Laplace-Transformierte des Riemann-Liouville-Integrals aufstellen, falls die untere Integrationsgrenze null ist. Denn offenbar gilt für  $p > 0$

$${}_0\mathbb{D}_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t - \tau)^{p-1} f(\tau) d\tau = \left( \frac{(\cdot)^{p-1}}{\Gamma(p)} * f \right) (t).$$

Die Laplace-Transformierte für  $t^{p-1}$  kann zum Beispiel in [Erd] nachgeschlagen werden und lautet  $\mathfrak{L}(t^{p-1})(s) = \Gamma(p)s^{-p}$ . Somit folgt für das Riemann-Liouville-Integral

$$\mathfrak{L}({}_0\mathbb{D}_t^{-p} f)(s) = s^{-p} \bar{f}(s). \quad (3.1)$$

Von nun an sei im gesamten Kapitel die untere Integralgrenze  $a = 0$ . Um eine Darstellung der Laplace-Transformierten für Riemann-Liouville-Ableitungen zu finden, sei  $p \in \mathbb{R}^+$  und  $n - 1 = [p]$ . Um die Herleitung einfach zu gestalten, definiere man sich

$$g^{(n)}(t) := {}_0\mathbb{D}_t^p f(t).$$

Dann ist  $g(\cdot)$  als gebrochenes Integral darstellbar:

$$g(t) = {}_0\mathbb{D}_t^{-(n-p)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_0^t (t - \tau)^{n-p-1} f(\tau) d\tau,$$

und mit Lemma (3.1) und der Darstellung für gebrochene Integrale folgt

$$\mathfrak{L}({}_0\mathbb{D}_t^p f)(s) = s^n \bar{g}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k g^{(n-k-1)}(0) = s^p \bar{f}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k g^{(n-k-1)}(0). \quad (3.2)$$

Wird außerdem  $g^{(n-k-1)}(t) = \frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}} {}_0\mathbb{D}_t^{-(n-p)} f(t) = {}_0\mathbb{D}_t^{p-k-1} f(t)$  beachtet, gilt für Laplace-Transformation der Riemann-Liouville-Ableitung

$$\mathfrak{L}({}_0\mathbb{D}_t^p f)(s) = s^p \bar{f}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[ {}_0\mathbb{D}_t^{p-k-1} f(t) \right]_{t=0}. \quad (3.3)$$

**Satz 3.1.** Für  $p \in \mathbb{R}^+$  gilt für die Laplace-Transformation eines gebrochenen Riemann-Liouville-Integrals

$$\mathfrak{L}({}_0\mathbb{D}_t^{-p} f)(s) = s^{-p} \bar{f}(s)$$

und für  $n - 1 = [p]$ ,  $n \in \mathbb{N}$  gilt für die gebrochene Riemann-Liouville-Ableitung

$$\mathfrak{L}({}_0\mathbb{D}_t^p f)(s) = s^p \bar{f}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[ {}_0\mathbb{D}_t^{p-k-1} f(t) \right]_{t=0}.$$

*Beweis.* Folgt aus den obigen Überlegungen. q.e.d.

Mit diesem Satz ist es möglich, gebrochene Differentialgleichungen zu lösen. Dabei geht man wie folgt vor:

1. Laplace-Transformation der gebrochenen Differentialgleichung
2. Lösen der transformierten Gleichung
3. Rücktransformation der Lösung.

**Beispiel 1**

Wir betrachten für  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  und ein  $a \in \mathbb{R}$  das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} {}_0\mathbb{D}_t^{1/2} f(t) + af(t) = 0, & t > 0 \\ {}_0\mathbb{D}_t^{-1/2} f(t)|_{t=0} = f_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Wendet man auf das AWP die Laplace-Transformation an, so folgt aus dem Satz 3.1

$$s^{1/2} \bar{f}(s) - {}_0\mathbb{D}_t^{-1/2} f(t)|_{t=0} + a \bar{f}(s) = 0,$$

woraus sich

$$\bar{f}(s) = \frac{f_0}{s^{1/2} + a}$$

ergibt. Um die Lösung rückzutransformieren, ist die Kenntnis der Laplace-Transformation der zweiparametrischen Mittag-Leffler-Funktion notwendig, die in [Pod] nachgeschlagen werden kann.

$$\mathfrak{L} \left( (\cdot)^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(k)}(\pm a(\cdot)^\alpha) \right) (s) = \int_0^\infty e^{-st} t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(k)}(\pm at^\alpha) dt = \frac{k! s^{\alpha - \beta}}{(s^\alpha \mp a)^{k+1}} \quad (3.4)$$

Mithilfe dieser Gleichung folgt die Lösung des Anfangswertproblems:

$$f(t) = f_0 t^{-1/2} E_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(-a\sqrt{t}).$$

### Beispiel 2

Etwas komplizierter gestaltet sich das Lösen einer partiellen linearen gebrochenen Differentialgleichung. Dieses Beispiel wird in [Nig] betrachtet und heißt deswegen Nigmatullins gebrochene Diffusionsgleichung.

$$\begin{cases} {}_0\mathbb{D}_t^\alpha u(x, t) = \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t), & t > 0 \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, t) = 0 \\ {}_0\mathbb{D}_t^{\alpha-1} u(x, t)|_{t=0} = \varphi(x), & 0 < \alpha < 1 \end{cases}$$

Hierbei ist  $\lambda$  der Diffusionskoeffizient. Nun wird zuerst eine Fourier-Transformation in der Ortskomponente durchgeführt. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} {}_0\mathbb{D}_t^\alpha \hat{u}(\xi, t) &= \lambda^2 \xi^2 \hat{u}(\xi, t), \\ {}_0\mathbb{D}_t^{\alpha-1} \hat{u}(\xi, t)|_{t=0} &= \hat{\varphi}(\xi). \end{aligned}$$

Nun wird eine Laplace-Transformation in der Zeit durchgeführt, womit folgt:

$$s^\alpha \mathfrak{L} \hat{u}(\xi, \cdot)(s) - \hat{\varphi}(\xi) + \lambda^2 \xi^2 \mathfrak{L} \hat{u}(\xi, \cdot)(s) = 0.$$

Dies ergibt wiederum

$$\mathfrak{L} \hat{u}(\xi, \cdot)(s) = \frac{\hat{\varphi}(\xi)}{s^\alpha + \lambda^2 \xi^2}.$$

Mit (3.4) folgt dann

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{\varphi}(\xi) t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda^2 \xi^2 t^\alpha),$$

und anschließende Fourier-Rücktransformation ergibt schließlich

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y, t) \varphi(y) dy \\ \text{mit } G(x, t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda^2 \xi^2 t^\alpha) \cos(\xi x) d\xi. \end{aligned}$$

Die Formel für  $G(x, t)$  ergibt sich durch simples nachrechnen der entsprechenden Formeln (siehe dazu auch Kapitel 6, Abschnitt Fourier-Transformation).

## 4 Anwendung: Elektrochemie

Diese erste Anwendung soll sich mit den Vorteilen gebrochener Ableitungen in der Elektrochemie befassen. Elektrochemie ist nicht das erste wissenschaftliche Feld, das von den Erkenntnissen der gebrochenen Infinitesimalrechnung profitiert. Doch es ist ein wesentlicher Bereich, und an ihm kann gut aufgezeigt werden, wie dieser aus der Existenz einer Semibleitung Nutzen zieht.

Die Aufgabe der Elektrochemie ist es, die wechselseitige Beeinflussung von Elektrizität und chemischen Systemen zu untersuchen. Gegenstand dieser Interaktion ist dabei oft die sogenannte elektrochemische Zelle. Diese besteht im Groben aus zwei Elektroden (Elektronenleiter), die in einer Lösung (Ionenleiter), wie z.B. Salzwasser, eingetaucht sind. Die Elektroden sind über Kabel mit einer Spannungsquelle verbunden, sodass sie aufgeladen werden können. Infolgedessen fließt ein Strom durch die elektrochemische Zelle, der mit einem Messgerät bestimmt werden kann. Dieser Strom ist sowohl bei konstanter als auch nicht konstanter Spannung zeitvariabel. Siehe dazu Abbildung (1). In den Elektronenleitern wird der Strom durch

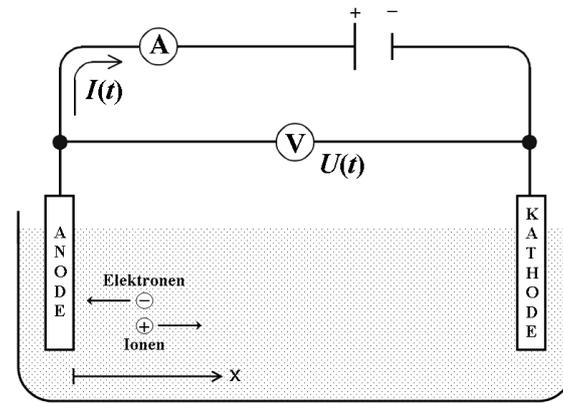
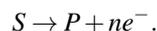


Abbildung 1: Elektrochemische Zelle

die Bewegung von Elektronen realisiert, im Ionenleiter ist es die Bewegung der Ionen. Der Stromfluss am Übergang von Elektrode zu Lösung wird durch chemische (genauer: elektrochemische) Reaktionen ermöglicht.

Da ein Strom eine feste Richtung besitzt, müssen an den beiden Elektroden auch verschiedene Reaktionen ausschlaggebend sein. Daher unterscheidet man zwischen der Anode, die Elektronen von dem ionischen Leiter aufnimmt, und der Kathode, die Elektronen dem ionischen Leiter abgibt. Der Fokus in dieser Anwendung soll auf die elektrochemischen Reaktionen an der Anode, auch Oxidation genannt, gelegt werden. Die Aufgabe eines Elektrochemikers ist es nun, solch eine Reaktion zu verifizieren und mithilfe dieser Information Aussagen über das Verhältnis von angelegter Spannung zu gemessenem Strom sowie Aussagen über Eigenschaften der Substanzen aus der Lösung zu treffen. Eine wichtige Eigenschaft ist hierbei ihre Konzentration.

Im Allgemeinen kann diese anodische Reaktion vereinfacht beschrieben werden als



Hierbei wird das Substrat  $S$  unter Abgabe von  $n$  Elektronen in ein Produkt  $P$  überführt. Wenn zum Beispiel in Wasser gelöstes Eisen-II-chlorid reagiert, ergäbe das



Während der Reaktion nimmt die Konzentration des Substrats an der Anode ab, die des Produkts nimmt zu. Durch diese Konzentrationsänderung entsteht ein Transport von  $S$  zur Anode hin. Dieser Transport wird hauptsächlich durch die Diffusion erklärt. Deswegen kann die Konzentration  $c = c(x, t)$  des Substrats an der Anode durch das sogenannte zweite Fick'sche Gesetz, auch bekannt als Diffusionsgleichung, beschrieben werden. Sie wird aus der Massenerhaltung hergeleitet werden und lautet

$$\frac{\partial}{\partial t} c(x, t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} c(x, t). \quad (4.1)$$

Hierbei ist  $D$  die Diffusionskonstante von  $S$ , die eindimensionale Ortskoordinate  $x$  zeigt von der Anode zur Kathode. Da der Einfluss der Diffusion aus nachvollziehbaren Gründen [Old] in der Praxis einen Bereich von  $0.3\text{ mm}$  nicht übersteigt, elektrochemische Zellen aber weitaus größer sind, bleibt der größte Teil der Lösung in ihrem Ausgangsverhältnis. Dies wird halb-unendliche Bedingung genannt und hat zur Folge, dass die Reaktion an der Anode keinen Einfluss auf den Bereich der Kathode hat und umgekehrt. Deswegen gilt für die Differentialgleichung (4.1) die Anfangs- und Randbedingung

$$c(x, 0) = c(x \rightarrow \infty, t) = c_0, \quad (4.2)$$

wobei  $c_0$  der Konzentration von  $S$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  entspricht. Damit ist modelliert, dass sich die Anfangsreaktion außerhalb des Einflussbereiches der elektrochemischen Reaktion nicht ändert.

Das System (4.1) und (4.2) ist unvollständig, da es keinen Randwert für  $x = 0$  gibt. Diese Information ist aus der angelegten Spannung  $\Delta U(t)$  zu entnehmen, die bekannt ist.

Unter gewissen Umständen (siehe Kapitel 3) kann auf eine Funktion  $f$  eine Laplace-Transformation angewandt werden, definiert über

$$\bar{f}(s) = \mathcal{L}f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Diese Transformation überführt die Funktion  $f = f(t)$  vom reellen Zeitbereich in eine Funktion  $\bar{f} = \bar{f}(s)$  im komplexen Spektralbereich. Wird (4.1) auf diese Art transformiert, ergibt sich die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{c}(x, s) = \frac{s}{D} \bar{c}(x, s) - \frac{c_0}{D} \quad (4.3)$$

mit der allgemeinen Lösung

$$\bar{c}(x, s) = \frac{c_0}{s} + w(s)e^{-x\sqrt{\frac{s}{D}}} + w'(s)e^{x\sqrt{\frac{s}{D}}}, \quad (4.4)$$

wobei  $w$  eine beliebige stetig differenzierbare Funktion sei. Damit die halb-unendliche Randwertbedingung (4.2) erfüllt wird, muss  $w'(s) = 0$  gelten. Daraus folgt unmittelbar  $w(s) = \bar{c}(0, s) - \frac{c_0}{s}$ , somit kann (4.4) geschrieben werden als

$$\bar{c}(x, s) = \frac{c_0}{s} \left(1 - e^{-x\sqrt{\frac{s}{D}}}\right) + \bar{c}(0, s)e^{-x\sqrt{\frac{s}{D}}}. \quad (4.5)$$

Allgemein ist der elektrische Strom proportional zum Fluss des Substrates  $S$  an der Anode und es gilt die Formel

$$I(t) = -nFAJ(0, t),$$

wobei  $A$  die Fläche der Elektrode und  $F$  die Faraday-Konstante ( $96,485\text{ Cmol}^{-1}$ ) ist. Mithilfe des ersten Fick'schen Gesetzes über den Fluss

$$J(x, t) = -D \frac{\partial}{\partial x} c(x, t)$$

folgt, dass der Strom in Abhängigkeit der Konzentration des Substrates an der Elektrode darstellbar ist:

$$I(t) = nFAD \frac{\partial}{\partial x} c(0, t). \quad (4.6)$$

Bevor die gebrochene Differentiation / Integration Eintritt in die Welt der Elektrochemie fand, gab es für einen Elektrochemiker nur eine Vorgehensweise zur Bestimmung der Konzentration von  $S$  in der Lösung. Er musste anhand der angelegten Spannung  $\Delta U(t)$  eine gewisse Konzentration an der Elektrode voraussetzen, um (4.5) sinnvoll nutzen zu können. Es war ihm nicht möglich, Gleichung (4.6) zu benutzen, um mithilfe des gemessenen Stromes  $I(t)$  die Anfangskonzentration zu bestimmen.

Bis hierhin wurde noch keine gebrochene Infinitesimalrechnung gebraucht. Um sich ihre Vorteile zu Nutzen machen zu können, wird eine geschickte Laplace-Rücktransformation angewandt. Dazu leite man die Lösungsformel (4.5) nach  $x$  ab, und betrachte sie an der Anode, also für  $x = 0$ . Dies ergibt

$$\frac{\partial}{\partial x} \bar{c}(0, s) = \frac{c_0}{\sqrt{Ds}} - \bar{c}(0, s) \sqrt{\frac{s}{D}}. \quad (4.7)$$

Mit der Formel für Laplace-Transformationen von gebrochenen Ableitungen (siehe Satz 3.1) und der Anwendung der Laplace-Rücktransformation auf Gleichung (4.7) folgt

$$\frac{\partial}{\partial x} c(0,t) = \frac{c_0}{\sqrt{\pi Dt}} - \frac{1}{\sqrt{D}} \frac{\partial^{1/2}}{\partial t^{1/2}} c(0,t). \quad (4.8)$$

Dieses Resultat beschreibt eine Verbindung zwischen räumlicher Ableitung und zeitlicher Semiableitung der Konzentration des Substrats  $S$  an der Anode. Setzt man nun (4.8) in (4.6) ein, so ergibt sich ein neuer Ausdruck für den elektrischen Strom

$$I(t) = nFA\sqrt{D} \left( \frac{c_0}{\sqrt{\pi t}} - \frac{\partial^{1/2}}{\partial t^{1/2}} c(0,t) \right). \quad (4.9)$$

Diese Formel setzt den Strom mit der Konzentration an der Anode in Verbindung, ohne auf die angelegte Spannung  $\Delta U(t)$  während des Experimentes angewiesen zu sein. Integriert man (4.9) auf gebrochene Art, so ergibt das die Gleichung

$$\frac{\partial^{-1/2}}{\partial t^{-1/2}} I(t) = nFA\sqrt{D} (c_0 - c(0,t)). \quad (4.10)$$

Offenbar besteht ein linearer Zusammenhang zwischen dem Semiintegral des Stroms und der Konzentration von  $S$  an der Anode. Diese Formel hat in der Elektrochemie solche Wichtigkeit erlangt, dass das Semiintegral des elektrischen Stromes eine eigene Bezeichnung  $M(t) = \frac{\partial^{-1/2}}{\partial t^{-1/2}} I(t)$  bekommen hat.  $M(t)$  besitzt die Einheit  $As^{1/2}$ , wobei  $A$  für Ampere und  $s$  für Sekunde steht. Es existieren bereits Tabellen, mit deren Hilfe Semiintegrale von in der Elektrochemie häufig auftretenden mathematischen Funktionen berechnet werden können.

## 5 Anwendung: Rheologie

Rheologie kommt aus dem Griechischen und bedeutet so viel wie Fließlehre. Sie ist die Wissenschaft, die sich mit Fließ- und Verformungseigenschaften von Materie beschäftigt. Insbesondere ist die Strömungslehre von nicht-newtonschen Fluiden eine Teildisziplin der Rheologie. Ein newtonsches Fluid ist ein Fluid, bei dem die Schubspannung linear von der Schergeschwindigkeit abhängt. Nicht-newtonsche Fluide sind Fluide, die diesem Ansatz nicht unterliegen.

In dieser Anwendung geht es um sogenannte viskoelastische Stoffe. Dies sind Stoffe, die sowohl elastisch (Festkörpereigenschaft) als auch viskos (Fluideigenschaft) unter Einwirkung äußerer Kräfte reagieren. Aufgrund dieses Phänomens ordnet man viskoelastische Fluide den nicht-newtonschen Fluiden zu.

Viskoelastische Fluide sind wegen ihrer Komplexität sehr schwierig zu beschreiben. Es existieren viele Erklärungsmodelle, viele davon sind empirisch beziehungsweise halbempirisch, doch jedes hat seine Grenzen. Eines dieser Modelle ist das sogenannte Maxwell-Modell, benannt nach dem Physiker und Mathematiker James Clerk Maxwell, der es 1867 veröffentlichte. Er nimmt an, dass viskoelastische Fluide mechanisch durch die Hintereinanderschaltung eines Dämpfungselementes und einer Feder beschrieben werden können (siehe Abbildung 2).

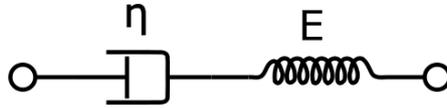


Abbildung 2: Maxwell-Modell zur Darstellung viskoelastischer Fluide

Das Dämpfungselement repräsentiert die Viskosität und gehorcht dem Newton'schen Schubspannungsansatz

$$\sigma = \eta \dot{\varepsilon},$$

die Feder repräsentiert die Elastizität und gehorcht dem Hooke'schen Gesetz

$$\sigma = E\varepsilon.$$

Hierbei ist  $\sigma$  die Schubspannung,  $\eta$  die dynamische Viskosität,  $\varepsilon$  die Dehnung und somit  $\dot{\varepsilon} = d\varepsilon/dt$  die Dehnungs-, Verformungs- oder Schergeschwindigkeit. Die Proportionalitätskonstante  $E$  wird Elastizitätsmodul genannt.

Das Maxwell-Modell kombiniert beide Gesetze entsprechend ihrer Anordnung, sodass sich letztendlich die Formel

$$\sigma(t) + \tau \frac{d\sigma(t)}{dt} = \tau E \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \quad (5.1)$$

zur Beschreibung rheologischer Effekte ergibt. Hierbei ist  $\tau = \eta/E$  eine charakteristische Relaxationszeit. Doch auch dieses Modell hat seine Schwächen. Es setzt einen linearen Zusammenhang zwischen Schubspannung und Schergeschwindigkeit voraus. Dieser Zusammenhang stimmt jedoch für höhere Dehnungsgeschwindigkeiten nicht mehr mit experimentellen Ergebnissen überein. Es wurden viele Versuche unternommen, um eine bessere Beschreibung von viskoelastischen Fluiden mit konventionellen Modellen zu erreichen, doch eine völlige Übereinstimmung mit den experimentellen Daten über alle Frequenzen gelang nicht.

Der Eintritt gebrochener Infinitesimalrechnung in das Gebiet der Rheologie verschafft den Wissenschaftlern neue Möglichkeiten zur Beschreibung ihrer Phänomene. Werden im Maxwell-Modell die Zeitableitungen durch Riemann-Liouville-Ableitungen ersetzt, erhält man eine sinnvolle Verallgemeinerung des Maxwell-Modells. Diese ist brauchbarer als konventionelle Modelle und somit ein wertvoller Ansatz zur Beschreibung der Eigenschaften viskoelastischer Fluide. Insbesondere wurde die Gültigkeit des gebrochenen Maxwell-Modells durch Experimente bestätigt [Tan]. Mit  $d^p/dt^p = {}_{-\infty} \mathbb{D}_t^p$  lautet die gebrochene Maxwell-Modell-Gleichung

$$\sigma + \tau^\alpha \frac{d^\alpha \sigma}{dt^\alpha} = E \tau^\beta \frac{d^\beta \varepsilon}{dt^\beta}, \quad (5.2)$$

wobei aus physikalischen Gründen  $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$  gilt. Möchte man die gebrochene Ableitung auf der rechten Seite als gebrochenes Integral interpretieren, so ergibt sich für (5.2):

$$\sigma + \tau^\alpha \frac{d^\alpha \sigma}{dt^\alpha} = E \tau^\beta \frac{d^{\beta-1} \dot{\epsilon}}{dt^{\beta-1}}. \quad (5.3)$$

Mithilfe von (5.3) soll nun eine Gleichung für die Geschwindigkeit eines viskoelastischen Fluides zwischen zwei parallelen unendlich langen Platten hergeleitet werden.

Verwendet man die aus den physikalisch-ingenieurwissenschaftlichen Bereichen bekannte Notation für Ort und Geschwindigkeit

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix},$$

so wird im Falle einer Strömung zwischen zwei parallelen Platten ein Geschwindigkeitsfeld der Art

$$\vec{c} = u(y,t) \vec{e}_1$$

gesucht, wobei  $\vec{e}_1$  der erste kanonische Einheitsvektor ist und entlang der Platten zeigt. Die Koordinate  $y$  beschreibt die Höhe,  $z$  steht für die Tiefe. Aufgrund dieser Überlegungen vereinfacht sich (5.3) zu

$$\sigma_{yx} + \tau^\alpha \frac{\partial^\alpha \sigma_{yx}}{\partial t^\alpha} = E \tau^\beta \frac{\partial^{\beta-1}}{\partial t^{\beta-1}} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (5.4)$$

denn die Schergeschwindigkeit bei Schichtenströmungen ist per Definition  $\dot{\epsilon} = \partial u / \partial y$ . Wird (5.4) nach  $y$  abgeleitet, ergibt sich mithilfe der Impulsgleichung

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y}$$

die grundlegende Gleichung für Strömungen zwischen zwei parallelen unendlich langen Platten:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \tau^\alpha \frac{\partial^{\alpha+1} u}{\partial t^{\alpha+1}} = E \tau^\beta \frac{\partial^{\beta-1}}{\partial t^{\beta-1}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \quad (5.5)$$

Hierbei ist  $\rho$  die Dichte des nichtnewtonschen Fluides. Damit die Gleichung dimensionslos wird, sollen die folgenden Variablen eingeführt werden:

$$\tilde{u} = \frac{u}{U}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{d}, \quad \tilde{t} = \frac{t U^2 \rho}{\eta}, \quad \lambda = \frac{U^2 \rho}{E}, \quad \zeta = \frac{\eta^2}{U^2 \rho^2 d^2}.$$

Die Konstanten  $U$ ,  $d$  und  $\eta / (U^2 \rho)$  sind als charakteristische Geschwindigkeit, Länge und Zeit zu verstehen,  $\lambda$  und  $\zeta$  sind dimensionslose Parameter. Damit wird (5.5) zu

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda^\alpha \frac{\partial^{\alpha+1} u}{\partial t^{\alpha+1}} = \zeta \lambda^{\beta-1} \frac{\partial^{\beta-1}}{\partial t^{\beta-1}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \quad (5.6)$$

Der Einfachheit halber wurden die Tilden weggelassen.

Wird nun der Fall betrachtet, dass sich die untere Platte abrupt in Bewegung setzt und anschließend die konstante Geschwindigkeit  $U$  hält, die obere Platte sich jedoch nicht bewegt, so kann mit entsprechenden Randbedingungen die Differentialgleichung (5.6) gelöst werden. Angenommen der Abstand zwischen den Platten sei  $d$  und  $y = 0$  bezeichne die Höhe der unteren Platte, dann lauten die dimensionslosen Randbedingungen:

$$\begin{aligned} u(0,t) &= \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \\ u(1,t) &= 0 \\ u(y,t) &= 0 \quad \text{für } 0 < y < 1 \text{ und } t \leq 0. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Die Lösung zu diesem Problem wird in [Tan] hergeleitet und lautet

$$u(y,t) = (1-y) - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\pi y)}{k\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \lambda^{-n\alpha} t^{n\alpha+\alpha} E_{\alpha+2-\beta, n(\beta-2)+1+\alpha}^{(n)}(-B_k t^{\alpha+2-\beta}) \\ - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\pi y)}{k\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \lambda^{-n\alpha} t^{n\alpha} E_{\alpha+2-\beta, n(\beta-2)+1}^{(n)}(-B_k t^{\alpha+2-\beta}).$$

Hierbei ist  $E_{v,\omega}^{(n)}$  die  $n$ -te Ableitung der zweiparametrischen Mittag-Leffler-Funktion und  $B_k$  eine vom Laufindex  $k$  abhängige Konstante.

Interessant an dieser Lösung ist, dass sie für  $\alpha = 0$  und  $\beta = 1$  gerade der Lösung der ebenen Couette-Strömung eines viskosen Newton-Fluids entspricht.

Mit verschiedenen Randbedingungen können nun weitere Szenarien modelliert werden, wie zum Beispiel den Fall, bei dem die untere Platte nicht die konstante Geschwindigkeit  $U$  annimmt, sondern eine periodische Bewegung durchführt. Dies soll hier nicht weiter ausgeführt werden, ist jedoch bei Interesse ebenfalls in [Tan] nachzulesen.

Wichtig ist, dass die Modellierung viskoelastischer Fluide mittels des gebrochenen Maxwell-Modells einen völlig neuen Ansatz geliefert hat, der sich zur analytischen Untersuchung nichtnewtonscher Fluide und Erforschung ihrer Eigenschaften als geeigneter herausgestellt hat als konventionelle Modelle und Methoden.

## 6 Gebrochene Sobolew-Räume

Im Kontext der variationellen Methoden bei Differentialgleichungen sucht man häufig Lösungen, die quadratisch integrierbar sind und die eine quadratisch integrierbare Ableitung besitzen. Aus physikalischer Sicht entsprechen diese Lösungen Systemen endlicher Energie. Diese Überlegung motiviert die Definition der Sobolew-Räume, die in diesem Kapitel zu gebrochenen Sobolew-Räumen, den sogenannten Sobolew-Slobodezki-Räumen erweitert werden soll.

### 6.1 Grundlagen

In diesem Kapitel sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  stets nichtleer und offen.

Wie üblich sei  $L^p(\Omega)$  ( $1 \leq p < \infty$ ) der Raum der Äquivalenzklassen fast überall gleicher Lebesgue-messbaren Funktionen  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit endlicher Norm  $\|f\|_p < \infty$ . Diese ist definiert durch

$$\|f\|_p = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

**Satz 6.1.** Für  $1 \leq p < \infty$  ist  $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$  ein Banach-Raum. Außerdem ist  $(L^2(\Omega), \|\cdot\|_2, (\cdot, \cdot))$  ein Hilbert-Raum mit dem inneren Produkt

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx.$$

*Beweis.* Für den Beweis sei auf [Dobro] verwiesen.

q.e.d.

**Definition 6.1.** Für  $m \in \mathbb{N}$  und  $1 \leq p < \infty$  ist der Sobolew-Raum definiert als

$$W^{m,p}(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega) : \forall \alpha \text{ mit } |\alpha| \leq m \text{ existiert } D^\alpha v \text{ und } D^\alpha v \in L^p(\Omega)\}.$$

Hierbei ist  $D^\alpha v$  als schwache Ableitung zu verstehen. Wie üblich ist  $\alpha$  ein Multiindex mit der Konvention

$$\alpha \in \mathbb{N}_0^d, \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d} \quad \text{sowie} \quad D^\alpha v = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} v. \quad (6.1)$$

Desweiteren bezeichne der Absolutbetrag eines Vektors die euklidische Norm.

**Satz 6.2.** Für  $m \in \mathbb{N}$  und  $1 \leq p < \infty$  ist  $(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{m,p})$  ein Banach-Raum. Außerdem ist  $(W^{m,2}(\Omega), \|\cdot\|_{m,2}, (\cdot, \cdot)_m)$  ein Hilbert-Raum. Dabei sind Norm und inneres Produkt definiert als

$$\|v\|_{m,p} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$(v, w)_m = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha v, D^\alpha w).$$

*Beweis.* Dieser Beweis kann ebenso in [Dobro] nachgelesen werden.

q.e.d.

### 6.2 Sobolew-Slobodezki-Räume I

Die gesamte variationelle Theorie von stationären partiellen Differentialgleichungen findet in Sobolew-Räumen statt. Diese Räume betrachten allerdings nur ganzzahlige Ableitungen. Zur Erweiterung dieser Räume im gebrochenen Sinne betrachte man die nun folgende Slobodezki-Halbnorm.

**Definition 6.2.** Für  $0 < \mu < 1$  und  $1 \leq p < \infty$  ist die Slobodezki-Halbnorm definiert als

$$|v|_{\mu,p} = \left( \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x - y|^{d + \mu p}} dx dy \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dieser Ausdruck ist nur eine Halbnorm, da diese für konstante Funktionen verschwindet. Außerdem ist zu beachten, dass  $|\cdot|_{\mu,p}$  für  $\mu \rightarrow 1$  nicht gegen  $|\cdot|_{1,p}$  mit  $|v|_{1,p}^p = \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^p dx$  konvergiert. Um diese Eigenschaft zu erreichen, muss die Slobodezki-Seminorm noch geeignet skaliert werden. Ohne intensiv darauf einzugehen sei erwähnt, dass die Skalierung  $(1-\mu)|\cdot|_{\mu,p}$  dies leistet. Näheres ist nachzulesen in [BBM].

Sei nun in diesem Kapitel stets  $s = m + \mu$ , wobei  $m = [s]$  und  $0 < \mu < 1$ .

**Definition 6.3.** Für  $1 \leq p < \infty$  ist der Sobolew-Slobodezki-Raum definiert als

$$W^{s,p}(\Omega) = \{v \in W^{m,p} : |D^{\alpha}v|_{\mu,p} < \infty \forall \alpha \text{ mit } |\alpha| = m\}.$$

Hierbei ist ebenfalls  $D^{\alpha}v$  als schwache Ableitung zu verstehen und  $\alpha$  ein Multiindex.

**Satz 6.3.** Für  $1 \leq p < \infty$  ist  $(W^{s,p}(\Omega), \|\cdot\|_{s,p})$  ein Banach-Raum. Außerdem ist  $(W^{s,2}(\Omega), \|\cdot\|_{s,2}, (\cdot, \cdot)_s)$  ein Hilbert-Raum. Dabei sind Norm und inneres Produkt definiert als

$$\begin{aligned} \|v\|_{s,p} &= \left( \|v\|_{m,p}^p + \sum_{|\alpha|=m} |D^{\alpha}v|_{\mu,p}^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ (v, w)_s &= (v, w)_m + \sum_{|\alpha|=m} (D^{\alpha}v, D^{\alpha}w)_{\mu} \\ (v, w)_{\mu} &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{(v(x) - v(y))(w(x) - w(y))}{|x - y|^{d+2\mu}} dx dy. \end{aligned}$$

*Beweis.* Es ist leicht nachzurechnen, dass  $\|\cdot\|_{s,p}$  eine Norm ist.

Bezüglich der Vollständigkeit reicht es aus, den Fall  $m = 0$  zu betrachten, da jede Cauchy-Folge in  $W^{s,p}$  auch Cauchy-Folge in  $W^{m,p}$  ist.

Sei  $\varepsilon > 0$  und  $(v_k)_k$  eine Cauchy-Folge in  $W^{\mu,p}$ , so ist  $(v_k)_k$  insbesondere Cauchy-Folge in  $L^p$ . Deswegen existiert eine Teilfolge  $(v_{k_m})_{k_m}$  mit  $v_{k_m} \rightarrow v$  punktweise fast überall auf  $\Omega$ . Daraus ergibt sich für  $l \in \mathbb{N}$  und

$$f(v_{k_m}, x, y) = \frac{|(v_{k_l}(x) - v_{k_m}(x)) - (v_{k_l}(y) - v_{k_m}(y))|^p}{|x - y|^{d+\mu p}},$$

dass  $f(v_{k_m}, x, y) \rightarrow f(v, x, y)$  punktweise fast überall auf  $\Omega \times \Omega$ , falls  $k_m \rightarrow \infty$  geht. Mit dem Lemma von Fatou folgt nun

$$|v_{k_l} - v|_{\mu,p} = \int_{\Omega} \int_{\Omega} f(v_{k_l}, x, y) dx dy \leq \liminf_{k_m \rightarrow \infty} |v_{k_l} - v_{k_m}|_{\mu,p}.$$

Da  $(v_k)_k$  eine Cauchy-Folge ist, gilt  $|v_{k_l} - v_{k_m}|_{\mu,p} < \varepsilon$ . Daraus ergibt sich die Konvergenz von  $v_{k_l}$  gegen  $v$  in  $W^{\mu,p}$ . Da jede Cauchy-Folge konvergent ist, wenn eine Teilfolge konvergiert, folgt die Behauptung. q.e.d.

Zu bemerken ist, dass für jede Sobolew-Slobodezki-Funktion  $\|v\|_{s,p} < \infty$  gilt.

Der Sobolew-Slobodezki-Hilbert-Raum sowie der gewöhnliche Sobolew-Hilbert-Raum kann noch auf eine weitere Art charakterisiert werden. Dieser Weg beruht auf den Eigenschaften der Fourier-Transformation. Deswegen soll nun an die Grundlagen erinnert werden.

### 6.3 Fourier-Transformation

Wie allgemein bekannt, wird die Fourier-Reihe dazu genutzt, periodische Funktionen als Linearkombination von trigonometrischen Funktionen darzustellen. Die Funktion  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heiße zum Beispiel  $L$ -periodisch, wenn  $u(x + kL) = u(x)$  für  $k \in \mathbb{N}$  gilt. Die Idee der Fourier-Transformation ist es nun, eine beliebige Funktion  $u$  als  $L$ -periodische Funktion mit  $L \rightarrow \infty$  zu interpretieren.

**Definition 6.4.** Sei  $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$ . Dann ist die Fourier-Transformierte von  $u$  definiert als

$$\hat{u}(\xi) = \mathfrak{F}u(\xi) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\xi \cdot x} u(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Wie üblich ist  $i = \sqrt{-1}$  die imaginäre Einheit. Es stellt sich nun die Frage, ob und wann es einen inversen Operator  $\mathfrak{F}^{-1}$  gibt, und wann  $u(x) = \mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{F}(u)$  gilt. Eine hinreichende Bedingung ist die folgende.

**Satz 6.4.** Seien  $u, \hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^d)$  und  $u$  stetig. Dann gilt

$$u(x) = \mathfrak{F}^{-1}\hat{u}(x) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}(\xi) e^{i\xi \cdot x} d\xi.$$

*Beweis.* Es sei auf [McLean] verwiesen.

q.e.d.

Nun soll  $\mathfrak{F}$  auf dem sogenannten Schwartz-Raum betrachtet werden.

**Definition 6.5.** Der Raum der schnell fallenden Funktionen oder auch Schwartz-Raum ist definiert als

$$S(\mathbb{R}^d) = \left\{ \Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d) : \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\alpha D^\beta \Phi(x)| < \infty \quad \forall \alpha, \beta \text{ Multiindizes} \right\}.$$

Dieser Raum liegt dicht in  $L^2(\mathbb{R}^d)$ , deswegen macht es Sinn  $\mathfrak{F} : S(\mathbb{R}^d) \rightarrow S(\mathbb{R}^d)$  zu betrachten. Das nun folgende Lemma ist als Parsevalsche Gleichung bekannt.

**Lemma 6.1.** Für  $u, v \in S$  gilt  $(u, v) = (\mathfrak{F}u, \mathfrak{F}v)$  und demnach

$$\|u\|_2 = \|\mathfrak{F}u\|_2.$$

*Beweis.* Da  $u = \mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{F}u$  ist, gilt

$$\begin{aligned} (u, v) &= \int_{\mathbb{R}^d} u(x)v(x)dx = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} v(x) \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}(\xi) e^{i\xi \cdot x} d\xi dx \\ &= (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}(\xi) \int_{\mathbb{R}^d} v(x) e^{i\xi \cdot x} dx d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}(\xi) \hat{v}(\xi) d\xi = (\mathfrak{F}u, \mathfrak{F}v) \end{aligned}$$

q.e.d.

Offenbar gilt die Parsevalsche Gleichung ebenso für  $\mathfrak{F}^{-1}$ .

Es existiert noch eine weitere Eigenschaft von schnell fallenden Funktionen, die in dieser Arbeit von Interesse ist.

**Lemma 6.2.** Für  $v \in S$  und einen Multiindex  $\alpha$  gilt

$$\mathfrak{F}D^\alpha v = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \mathfrak{F}v.$$

*Beweis.* Da  $v$  schnell fallend ist, gilt für  $j \in \{1 \dots d\}$  mit partieller Integration

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix \cdot \xi} \frac{\partial}{\partial x_j} v(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial}{\partial x_j} e^{-ix \cdot \xi} v(x) dx = i\xi_j \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix \cdot \xi} v(x) dx,$$

und somit

$$\mathfrak{F}D^\alpha v(\xi) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix \cdot \xi} D^\alpha v(x) dx = (-1)^{|\alpha|} (-i)^{|\alpha|} \xi^\alpha (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix \cdot \xi} v(x) dx,$$

und damit folgt die Behauptung.

q.e.d.

Da  $S(\mathbb{R}^d)$  dicht in  $L^2(\mathbb{R}^d)$  liegt, soll nun die eindeutige Fortsetzung von  $\mathfrak{F}$  auf  $L^2$  betrachtet werden. Diese heißt Fourier-Plancherel-Transformation und wird ebenso mit  $\mathfrak{F}$  bezeichnet. Wegen der Parsevalschen Gleichung ist  $\mathfrak{F} : L^2 \rightarrow L^2$  ein isometrischer Isomorphismus. Dieses etwas kurz ausgeführte Resultat ist auch unter dem Satz von Plancherel bekannt und wahlweise in [Dobro] oder in [McLean] nachzulesen.

## 6.4 Sobolew-Slobodezki-Räume II

Nun soll ein weiterer Zugang zu den Sobolew-Slobodezki-Räumen geschaffen werden. Mithilfe dieser Charakterisierung lassen sich viele Eigenschaften sowohl der klassischen als auch der gebrochenen Sobolew-Räume auf sehr bequeme Art und Weise zeigen.

Grundlage für diesen Zugang ist das nun folgende Lemma:

**Lemma 6.3.** Sei  $0 < \mu < 1$ . Dann gilt für alle  $v \in W^{\mu,2}(\mathbb{R}^d)$

$$\|u\|_{\mu,2}^2 = a_\mu \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\mu} |\mathfrak{F}u(\xi)|^2 d\xi.$$

*Beweis.* Nach den Vorüberlegungen ist  $u(x) = \mathfrak{F}^{-1} \mathfrak{F}u(x)$  und somit

$$\begin{aligned} u(x+z) - u(x) &= (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} \left( e^{i(x+z)\cdot\xi} \mathfrak{F}u(\xi) - e^{ix\cdot\xi} \mathfrak{F}u(\xi) \right) d\xi \\ &= (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi} \left( e^{iz\cdot\xi} - 1 \right) \mathfrak{F}u(\xi) d\xi \\ &= \mathfrak{F}^{-1} \left( (e^{iz\cdot\xi} - 1) \mathfrak{F}u \right) (x). \end{aligned}$$

Mit der Parsevalschen Gleichung (Lemma 6.1) folgt dann

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |u(x+z) - u(x)|^2 dx &= \|u(\cdot+z) - u(\cdot)\|_2^2 \\ &= \|\mathfrak{F}^{-1} \left( (e^{iz\cdot\xi} - 1) \mathfrak{F}u \right)\|_2^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |\mathfrak{F}u(\xi)|^2 |e^{iz\cdot\xi} - 1|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Deswegen ist

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|u(x+z) - u(x)|^2}{|z|^{d+2\mu}} dx dz = \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\mu} |\mathfrak{F}u(\xi)|^2 \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|e^{iz\cdot\xi} - 1|^2}{|\xi|^{2\mu} |z|^{d+2\mu}} dz d\xi.$$

Im inneren Integral wird nun die Koordinatentransformation  $z = |\xi|^{-1}y$  mit  $dz = |\xi|^{-d} dy$  durchgeführt. Diese ergibt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|e^{iz\cdot\xi} - 1|^2}{|\xi|^{2\mu} |z|^{d+2\mu}} dz &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|e^{i\omega\cdot y} - 1|^2}{|\xi|^{2\mu} |\xi|^{-1} |y|^{d+2\mu}} |\xi|^{-1} dy_1 \dots |\xi|^{-1} dy_d \quad \text{mit } |\omega| = 1 \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|e^{i\omega\cdot y} - 1|^2}{|y|^{d+2\mu}} dy =: a_\mu. \end{aligned}$$

Das Integral  $a_\mu$  hängt nicht von  $\omega$  ab und ist beschränkt.

q.e.d.

**Satz 6.5.** Sei  $u \in W^{s,2}(\mathbb{R}^d)$  mit  $s \geq 0$ . Dann existieren Konstanten  $c_1 > 0$  und  $c_2 > 0$ , sodass gilt

$$c_1 \|u\|_{s,2}^2 \leq \|(1 + |\cdot|)^s \mathfrak{F}u\|_2^2 \leq c_2 \|u\|_{s,2}^2.$$

*Beweis.* Sei  $s = m$  mit  $m \in \mathbb{N}$ . Da  $u \in W^{m,2}(\mathbb{R}^d)$  ist, gilt  $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$  und  $D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^d)$  für alle  $\alpha$  mit  $|\alpha| \leq m$ . Mit der Parsevalschen Gleichung (Lemma 6.1) und Lemma 6.2 folgt dann

$$\|D^\alpha u\|_2 = \|\mathfrak{F}(D^\alpha u)\|_2 = \|(\cdot)^\alpha \mathfrak{F}u\|_2. \quad (6.2)$$

Es existieren Konstanten  $\tilde{c}_1 > 0$  und  $\tilde{c}_2 > 0$ , für die gilt

$$\tilde{c}_1 \sum_{|\alpha| \leq m} |\xi^\alpha|^2 \leq (1 + |\xi|)^{2m} \leq \tilde{c}_2 \sum_{|\alpha| \leq m} |\xi^\alpha|^2.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \|(1+|\cdot|)^m \mathfrak{F}u\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|)^{2m} |\mathfrak{F}u(\xi)|^2 d\xi \leq \tilde{c}_2 \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{|\alpha| \leq m} |\xi^\alpha|^2 |\mathfrak{F}u(\xi)|^2 d\xi \\ &= \tilde{c}_2 \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi^\alpha \mathfrak{F}u(\xi)|^2 d\xi = \tilde{c}_2 \sum_{|\alpha| \leq m} \|(\cdot)^\alpha \mathfrak{F}u\|_2^2 = \tilde{c}_2 \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_2^2 \\ &= \tilde{c}_2 \|u\|_{m,2}^2, \end{aligned}$$

und analog die andere Richtung. Daraus ergibt sich die Behauptung für  $s = m$ .

Für  $s = m + \mu$  mit  $0 < \mu < 1$  ergibt sich die Äquivalenz aus Lemma 6.3 und dem gerade gezeigten Fall. q.e.d.

Damit wurde eine äquivalente Norm gefunden, die sehr einfach zu berechnen ist. Anstatt mit  $(1+|\xi|)^s$  wird mit  $(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}$  ebenso eine Norm definiert. Diese wird häufiger verwendet als die hier eingeführte. Der Satz (6.5) mit veränderter Norm ist in [McLean] bewiesen, wodurch gezeigt ist, dass beide Darstellungen äquivalent sind.

Mit diesen Überlegungen folgt, dass der Raum

$$H^s(\mathbb{R}^d) := \left\{ v \in S(\mathbb{R}^d)^* : \mathfrak{J}^s v \in L^2(\mathbb{R}^d) \right\} \quad (6.3)$$

ausgestattet mit der Norm

$$\|u\|_{H^s} = \|(1+|\cdot|^2)^{\frac{s}{2}} \mathfrak{F}u\|_2 \quad (6.4)$$

gerade dem Sobolew-Raum  $W^{s,2}(\mathbb{R}^d)$  entspricht. Hierbei ist  $S(\mathbb{R}^d)^*$  der Dualraum zum Raum der schnell fallenden Funktionen und  $\mathfrak{J}^s : S(\mathbb{R}^d) \rightarrow S(\mathbb{R}^d)$  das sogenannte Bessels-Potential, definiert über

$$\mathfrak{J}^s v(x) = \mathfrak{F}^{-1} \lambda^s \mathfrak{F}v(x) \quad \text{mit} \quad \lambda^s(\xi) = (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}.$$

Aus diesem Grund wird  $W^{s,2}$  auch mit  $H^s$  bezeichnet.

Bis jetzt gilt die eben gezeigte Normäquivalenz nur, falls  $\Omega = \mathbb{R}^d$  ist. Für allgemeine  $\Omega$  gibt es aber das folgende Resultat.

**Satz 6.6.** Sei  $s \geq 0$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  offen und nichtleer. Gibt es einen stetigen Operator

$$E : H^s(\Omega) \rightarrow H^s(\mathbb{R}^d) \quad \text{mit} \quad Eu|_\Omega = u,$$

dann gilt

$$H^s(\mathbb{R}^d)|_\Omega = H^s(\Omega) \quad \text{und} \quad \|u\|_s^* = \inf\{ \|(1+|\cdot|)^s \mathfrak{F}\tilde{u}\|_2 : \tilde{u} \in H^s(\mathbb{R}^d), \tilde{u}|_\Omega = u \}$$

ist zu  $\|u\|_{s,2}$  äquivalent.

*Beweis.* Mit dem vorherigen Satz folgt einerseits

$$\|u\|_s^* \leq \|(1+|\cdot|)^s \mathfrak{F}Eu\|_2 \leq c \|Eu\|_{s,2} \leq c \|u\|_{s,2}$$

und andererseits

$$\|u\|_{s,2} \leq \|\tilde{u}\|_{s,2} \leq c \|(1+|\cdot|)^s \mathfrak{F}\tilde{u}\|_2.$$

Durch Infimumbildung folgt die Behauptung. q.e.d.

Hinreichend für die Existenz eines solchen Operators ist die Forderung, dass  $\Omega$  Lipschitz ist. Zu weiteren Informationen über den Fortsetzungsoperator und dessen Existenz sei auf [McLean, Appendix A] verwiesen.

### 6.5 Sobolew-Slobodezki-Räume III

Der Vollständigkeit halber soll noch eine dritte Weise präsentiert werden, wie Sobolew-Slobodezki-Räume charakterisiert werden können. Dieser Abschnitt orientiert sich an [McLean, Appendix B], detaillierte Informationen zu dem Thema findet man auch in [Tar]. Die Idee hinter der nun folgenden Charakterisierung beruht auf der Interpolationen von normierten Räumen. Ziel dieses Abschnitts ist es, die Sobolew-Slobodezki-Räume als Interpolation von Sobolew-Räumen mit ganzzahligen Exponenten darzustellen, wobei wie bei der Charakterisierung über die Fourier-Transformation nur Hilberträume betrachtet werden. Für solch eine Interpolation im Reellen gibt es zwei Methoden: die K-Methode und die J-Methode. Wir beschränken uns auf die K-Methode.

Sei  $Z$  ein beliebiger Vektorraum und  $X_0, X_1 \subset Z$  seien normierte Räume. Dann heißt  $X = (X_0, X_1)$  *kompatibles Paar*. Für solch ein kompatibles Paar betrachte man die Räume  $X_0 \cap X_1$  und  $X_0 + X_1$  mit den Normen

$$\begin{aligned}\|u\|_{X_0 \cap X_1} &= (\|u\|_{X_0}^2 + \|u\|_{X_1}^2)^{\frac{1}{2}}, \\ \|u\|_{X_0 + X_1} &= \inf_{u=u_0+u_1} (\|u_0\|_{X_0}^2 + \|u_1\|_{X_1}^2)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

wobei  $u_0 \in X_0$  und  $u_1 \in X_1$  sei. Dann gelten die Inklusionen

$$X_0 \cap X_1 \subseteq X_0, X_1 \subseteq X_0 + X_1.$$

Diese sind sogar stetig, denn es gilt

$$\|u\|_{X_0 + X_1} \leq \|u\|_{X_0}, \|u\|_{X_1} \leq \|u\|_{X_0 \cap X_1}.$$

Für  $0 < \theta < 1$  und  $1 \leq q < \infty$  nennt man  $X_{\theta,q} = (X_0, X_1)_{\theta,q}$  aufgrund der Eigenschaft

$$X_0 \cap X_1 \subseteq X_{\theta,q} \subseteq X_0 + X_1 \tag{6.5}$$

Zwischenraum von  $X_0$  und  $X_1$ .

**Definition 6.6.** Für  $t > 0$  und  $u = u_0 + u_1$  mit  $u_0 \in X_0$  und  $u_1 \in X_1$  ist das K-Funktional definiert als

$$K(t, u) = \inf_u (\|u_0\|_{X_0}^2 + t^2 \|u_1\|_{X_1}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Für festes  $t > 0$  ist das K-Funktional eine äquivalente Norm des Raumes  $X_0 + X_1$  und für festes  $u$  ist  $K(\cdot, u)$  eine nicht-fallende Funktion in  $t$ . Um der Definition eines Interpolationsraumes einen Schritt näher zu kommen, definiert man sich für  $0 < \theta < 1$  und  $1 \leq q < \infty$  die gewichtete  $L^q$ -Norm

$$\|f\|_{\theta,q} = \left( \int_0^\infty |t^{-\theta} f(t)|^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Mithilfe dieser Norm lässt sich der Raum

$$K_{\theta,q}(X) = \{u \in X_0 + X_1 : \|K(\cdot, u)\|_{\theta,q} < \infty\}$$

definieren, wobei wir  $\|u\|_{K_{\theta,q}(X)} = \left(\frac{2 \sin \pi \theta}{\pi}\right)^{1/2} \|K(\cdot, u)\|_{\theta,q}$  setzen.

**Lemma 6.4.** Für  $0 < \theta < 1$  und  $1 \leq q < \infty$  ist  $X_{\theta,q} = K_{\theta,q}(X)$  ein Zwischenraum bezüglich  $X_0$  und  $X_1$ . Die Eigenschaft (6.5) ist mit stetigen Inklusionen erfüllt.

*Beweis.* Siehe [McLean, Lemma B.1].

q.e.d.

Nun folgt die sogenannte Interpolationseigenschaft der K-Methode. Sie zeichnet einen Zwischenraum als Interpolationsraum aus.

**Satz 6.7.** Seien  $X = (X_0, X_1)$  und  $Y = (Y_0, Y_1)$  kompatible Paare. Falls lineare beschränkte Operatoren  $A_0 : X_0 \rightarrow Y_0$  und  $A_1 : X_1 \rightarrow Y_1$  mit der Eigenschaft  $A_0 u = A_1 u$  für alle  $u \in X_0 \cap X_1$  existieren, dann gibt es auch einen eindeutigen linearen beschränkten Operator  $A_\theta : K_{\theta,q}(X) \rightarrow K_{\theta,q}(Y)$  mit der Eigenschaft  $A_\theta u = A_0 u = A_1 u$  für alle  $u \in X_0 \cap X_1$ . Außerdem gilt für  $u \in K_{\theta,q}(X)$

$$\|A_\theta u\|_{K_{\theta,q}(Y)} \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|u\|_{K_{\theta,q}(X)},$$

wobei  $M_0 > 0$  und  $M_1 > 0$  die Konstanten aus der Beschränktheit von  $A_0$  und  $A_1$  sind.

*Beweis.* Siehe [McLean, Satz B.2].

q.e.d.

Nun soll die K-Methode auf die Sobolew-Räume angewandt werden. Dazu wird  $Z = L^2(\mathbb{R}^d)$  gewählt.

**Satz 6.8.** Für  $s_0, s_1 \in \mathbb{R}^+$ ,  $0 < \theta < 1$  und  $s = (1 - \theta)s_0 + \theta s_1$  gilt

$$\left( H^{s_0}(\mathbb{R}^d), H^{s_1}(\mathbb{R}^d) \right)_{\theta,2} = H^s(\mathbb{R}^d).$$

Desweiteren stimmt die  $K_{\theta,2}$ -Norm mit der Sobolew-Norm via Fourier-Transformation (siehe Formel 6.4) überein.

*Beweis.* Siehe [McLean, Satz B.7].

q.e.d.

In diesem Beweis wird ausgenutzt, dass das K-Funktional mithilfe der Fourier-Transformation explizit berechnet werden kann.

Insbesondere gilt der Satz für  $s_0, s_1 \in \mathbb{N}$ . Somit können gebrochene Sobolew-Räume durch Interpolation ganzzahliger Sobolew-Räume charakterisiert werden. Ein gleiches Resultat lässt sich auch für  $H^s(\Omega)$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  offen und nichtleer, zeigen.

## 7 Schluss

In der Einleitung wurde die Frage gestellt, ob es eine Darstellung für gebrochene Ableitungen gibt, deren  $L^2$ -Norm gerade der Funktion in der Slobodezki-Halbnorm entspricht. Kandidat für diese Äquivalenz sind die Fourier-Darstellung und das Lemma 6.3. Für  $d = 1$  und  $\Omega = (0, T)$  gilt in der Tat

$$\frac{1}{a_\mu} |u|_{\mu,2}^2 = \int_{\Omega} |\tau|^{2\mu} |\mathfrak{F}u(\tau)|^2 d\tau = \int_0^T |\tau^\mu \mathfrak{F}u(\tau)|^2 d\tau = \|(\cdot)^\mu \mathfrak{F}u\|_2^2.$$

Der letzte Ausdruck kann unter Beachtung von Gleichung 6.2 durchaus als  $\mu$ -te Fourier-Ableitung interpretiert werden.

Um auf Leibniz' Frage nach der halben Ableitung von  $x$  einzugehen, und damit diese Arbeit über gebrochene Ableitungen nicht komplett ohne die Berechnung einer einzigen gebrochenen Ableitung auskommt, soll zum Schluss noch die Riemann-Liouville-Ableitung der Funktion

$$f(x) = (x-a)^v$$

als Beispiel berechnet werden. Hierbei ist  $v$  eine beliebige reelle Zahl mit  $v > -1$ .

Für das  $p$ -fache Riemann-Liouville-Integral mit  $p \in \mathbb{R}^+$  gilt mit der Substitution  $\xi = a + \zeta(x-a)$

$$\begin{aligned} {}_a\mathbb{D}_x^{-p} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^x (x-\xi)^{p-1} (\xi-a)^v d\xi \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)} (x-a)^{v+p} \int_0^1 \zeta^v (1-\zeta)^{p-1} d\zeta \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)} B(v+1, p) (x-a)^{v+p}. \end{aligned}$$

Dabei ist  $B(\cdot, \cdot)$  die Beta-Funktion, definiert als  $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$  für  $x > 0$  und  $y > 0$ . Für die Beta-Funktion gilt

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Diese Eigenschaft wird mittels Laplace-Transformation gezeigt und kann in [Pod] nachgeschlagen werden. Somit folgt für das  $p$ -fache Riemann-Liouville-Integral

$${}_a\mathbb{D}_x^{-p} f(x) = \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v+p+1)} (x-a)^{v+p}.$$

Dies ergibt für die  $\mu$ -te Ableitung mit  $0 < \mu < 1$

$$\begin{aligned} {}_a\mathbb{D}_x^\mu f(x) &= \frac{d}{dx} \left( {}_a\mathbb{D}_x^{-(1-\mu)} f(x) \right) \\ &= \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-\mu+1)} (x-a)^{v-\mu}. \end{aligned}$$

Mit  $v = 1$ ,  $\mu = \frac{1}{2}$  und  $a = 0$  und unter Beachtung von  $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  folgt dann

$${}_0\mathbb{D}_x^{1/2} x = \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})} x^{1/2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} x^{1/2}.$$

Dies entspricht – bis auf den Vorfaktor – in der Tat den Berechnungen von Leibniz, denn nach ihm gilt

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} x = x \sqrt{\frac{1}{x}} = x^{1/2}.$$

## 8 Literatur

[BBM]: J. Bourgain, H. Brezis, P. Mironescu  
*Another look at Sobolev spaces*  
 in *Optimal Control and Partial Differential Equations* (J.L. Menaldi, E. Rofman and A. Sulem), IOS Press, 2001, pp. 439-455

[Dobro]: M. Dobrowolski  
*Angewandte Funktionalanalysis*  
 Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2006

[Erd]: A. Erdélyi  
*Tables of Integral Transforms*  
 Volume 1, McGraw-Hill, New York, 1955

[Herr]: R. Herrmann  
*Fraktionale Infinitesimalrechnung: Eine Einführung für Physiker*  
 Books on Demand GmbH, Norderstedt 2008

[LH]: G. W. Leibniz  
*Sämtliche Schriften und Briefe*  
 Band 6: 1694 - Juni 1696, Akademie-Verlag 2004

[McLean]: W. McLean  
*Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations*  
 Cambridge University Press 2000

[Nig]: R. R. Nigmatullin  
*The Realization of the Generalized Transfer Equation in a Medium with Fractal Geometry*  
 Phys. Sta. Sol. (b), Volume 133, 1986, pp. 425-430

[Old]: K. B. Oldham  
*Fractional differential equations in electrochemistry*  
 Advances in Engineering Software 41, No. 1, 9-12

[Pod]: I. Podlubny  
*Fractional Differential Equations*  
 Mathematics in Science and Engineering, Volume 198, Academic Press 1999

[Tan]: W.C. Tan et al.  
*A note on unsteady flows of a viscoelastic fluid with the fractional Maxwell model between two parallel plates*  
 International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 38, Issue 5, July 2003, Pages 645-650

[Tar]: L. Tartar  
*An Introduction to Sobolev Spaces and Interpolation Spaces*  
 Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2007